

地形界面とランダムループ統計

日大生産工 ○小林 奈央樹

1. はじめに

我々が目にする山並みの縦横を同じ比率で大きくすると、最初の山並みとは似ても似つかない山並みが形成されるだろう。それよりも、たとえば縦の拡大比を横の比よりも小さくするなど、異方的に変化させたほうが最初の山並みに近いパターンが形成される。このとき、山並みは自己アフィンフラクタルであるという [1]。山並みは地形界面の垂直断面プロファイルを見ていることになり、上のような視点はフラクタル物理の立場から地形界面を特徴付けたことに対応する。地形界面を特徴付けるには、垂直断面プロファイルを作る方法以外に、水平断面プロファイル（ある高さにおける等高線）を作成して、その解析をすることも考えられる。このようにして作られた水平断面プロファイルは、自己アフィンフラクタルではなく、スケール変換を等方的に行うことで、元のパターンと相似になる自己相似フラクタルであることが知られている [1]。この性質を用いて、実際の地形界面およびそれに類する性質を持つ界面を特徴付ける試みが1990年代以降行われている [2][3][4]。

本講演では、シミュレーションから得られた仮想的な地形界面のフラクタル解析を紹介する。さらに、近年、数理物理、統計物理学分野で発展が著しいランダム曲線の統計性に関する理論を用いた地形界面の解析についての我々の成果について紹介する。

2. ランダムループ曲線群のフラクタル解析

地形界面など 2 次元曲面の水平断面プロファイルを作成すると、図 1 のような閉（ループ）曲線群が得られる。これらは、一般的にランダムな形状をしているので、ランダムループ曲線群である。曲線群全体のパターンについて、全体に一辺 ε の格子で覆うと、その格子の中にパターンがあるかどうかを調べるこ

とができる。パターンがある格子の数を $N(\varepsilon)$ とすると

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_e}$$

というスケーリング関係が成り立つ。ここで指数 D_e はパターン全体のフラクタル次元を表す。同様に、個々のループ曲線に関して、回転半径 R_g と周の長さ s との間に

$$s \sim R_g^{D_c}$$

というスケーリング関係が成り立つ。指数 D_c は個々のループ曲線共通のフラクタル次元である。さらに、ループ曲線の面積 x とその度数 $n(x)$ について

$$\int_x^\infty n(x') dx' = N_{\text{cum}}(x) \sim x^{-\zeta}$$

が成り立つ（コルチャック則）。

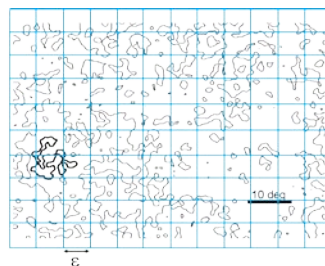


図 1 ループ曲線群の例

3. ハースト指数

地形界面などのランダムな凸凹のある界面の荒さを特徴付ける指数として、ハースト指数 H が知られている。ハースト指数 H は非整数ブラウン運動の確率密度関数により以下のように定義されている。

$$p(h, s) = \frac{1}{(4\pi D_d s^{2H})^{1/2}} \exp\left(-\frac{h^2}{4D_d s^{2H}}\right)$$

ここで D_d は粒子の拡散係数である。図 2 ～ 4 に本研究で用いた、仮想的な地形曲面のハースト指数による変化の様子を挙げる。定義式から、ハースト指数が $1/2$ のとき、通常の 1 次元ブラウン運動を与える。それよりもハースト

スト指数が小さくなると、反持続性を示し、その反対にハースト指数が大きくなると、持続性を示す。

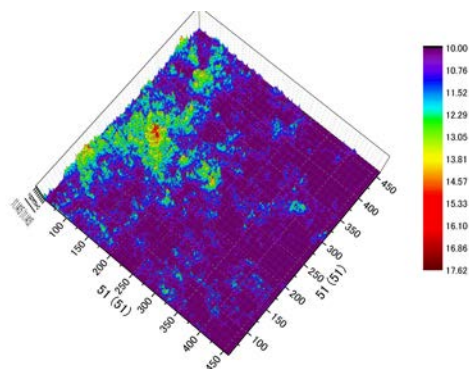


図 2 $H = 0.1$ の地形界面.

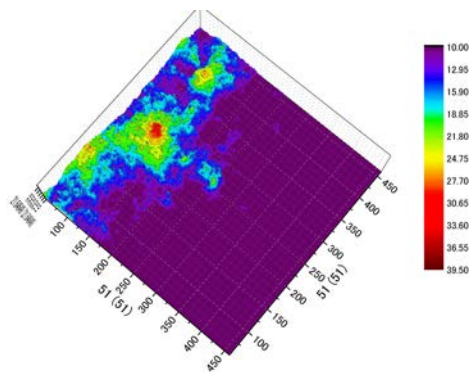


図 3 $H = 0.5$ の地形界面.

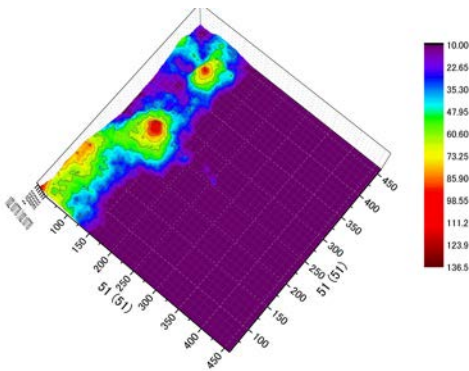


図 4 $H = 0.9$ の地形界面.

4. 解析結果

我々は図2～4に示すような、ハースト指数 H を $0 < H < 1$ の範囲で変化させ、地形界面を生成し[5], そこから標高 0 の等高線群 (つまり海岸線群) を作成した. それに対して, 上記の特性指数を実際に求め, さらに, 特性指数間で成立すると予想されている 5 種類のスケ

ーリング関係式 [2][6] が実際に成り立っていることを, この界面で確認した.

近年, ランダムループの統計性はブラウン運動の軌跡や平衡統計力学に現れる界面との関係が注目されている[4][7][8]. それらを踏まえた, ゆらぎを伴う荒い界面に関しての普遍性についても本講演で触れたい.

参考文献

- [1] 松下貢, 「フラクタルの物理 (II)」 (裳華房, 2004).
- [2] M. Matsushita, S. Ouchi, and K. Honda, "On the Fractal Structure and Statistics of Contour Lines on a Self-Affine Surface", J. Phys. Soc. Jpn. **60** (1991) 2109-2112.
- [3] Y. Sasaki, N. Kobayashi, S. Ouchi, and M. Matsushita, "Fractal Structure and Statistics of Computer-simulated and Real Landforms", J. Phys. Soc. Jpn. **75** (2006) 074804.
- [4] N. Kobayashi, *et al.*, "Fractal Structure of Isothermal Lines and Loops on the Cosmic Microwave Background", J. Phys. Soc. Jpn. **80** (2011) 074003.
- [5] J. Feder, "Fractals" (Plenum Press, 1988).
- [6] J. Kondev and C. L. Henley, "Geometrical Exponents of Contour Loops on Random Gaussian Surfaces", Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 4580.
- [7] O. Schramm, "Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees", Israel J. Math. **118** (2000) 221-288.
- [8] 香取眞理, 「臨界現象・フラクタル研究の新世紀 -- SLE の発見--」, 日本物理学会誌 **62** (7) (2007) 527-531.