

量子確率論におけるライヘンバッハの共通原因

日大生産工 ○北島雄一郎

1 はじめに

部屋に電子レンジとテレビがあったとしよう。ある日テレビを見ながら電子レンジを使っていたら、突然テレビが消え電子レンジが動かなくなったとする。この時、我々は電子レンジとテレビが同時に壊れたとは思えない。そのようなことはありそうにないからだ。通常は、ブレーカーが落ちたのではないかなど、電子レンジとテレビが同時に動かなくなった共通原因を探す。つまり、同時に起こることはありそうもない事象が同時に起こったとしたら共通原因があると、多くの場合我々は考える。Reichenbach (1956)は確率を用いて共通原因を厳密に定義した (Reichenbach, 1956, p. 159)。

つまり、我々は同時に起こることがありそうもない事象が同時に起こったとしたら、共通原因があるはずであると考え。こうした日常的な直観にもとづき Reichenbach (1956)は確率を用いて共通原因を厳密に定義した (p.159)。さらに Reichenbach (1956)は、ある二つの事象が共通原因をもつならば、その二つの事象は確率的な相関を持つということを示した。しかし、確率的に相関した二つの事象に対して常にライヘンバッハが定義した共通原因が存在するかどうかは自明ではない。このことを要請する原理、つまり、因果的に独立な二つの事象の確率的相関に対して、常にその共通原因が存在するという原理は、ライヘンバッハの共通原因原理とよばれる。

ここで重要なのは、共通原因原理は形而上学的な原理であり、この原理を反証することは難しいということである。例えば、ある確率空間において二つの因果的に独立な事象が相関しているにもかかわらず、この確率空間はこの相関の共通原因を含んでいないとしよ

う。しかし、この確率空間は、共通原因原理の反証例とならない。なぜなら、共通原因は隠されているだけかもしれないからだ。つまり、この確率空間を含むより大きい確率空間が存在して、その確率空間はこの相関と共通原因を含んでいる可能性がある。

このことから分かるのは、共通原因原理と、確率空間が因果的に独立な二つの事象の共通原因を常に含んでいるという性質は区別しなければならないということである。そこで、このような性質をもつ確率空間を共通原因で閉じているとよぶことにする。本発表の目的は、共通原因原理の反証、もしくは確証できるかどうかを検討することではない。上で述べたように、これは微妙な問題である。ここでの目的は、科学理論における確率空間が共通原因原理を支持する証拠とみなせるかどうかである。そのために、それらの確率空間が共通原因で閉じているかどうかを検討する。ここでは、非相対論的量子力学と代数的場の量子論における確率空間を扱う。

量子力学や代数的場の量子論においてベルの不等式が破れている (cf. Kitajima 2013) のだから、非相対論的量子力学と代数的場の量子論では、共通原因で閉じていないことは自明であると考えの人がいるかもしれない。確かに、ベルの不等式は、定義2で述べるライヘンバッハの共通原因と類似した条件から導かれる (cf. Bub 1999, Section 2.5)。量子力学においてベルの不等式は破れるのだから、ライヘンバッハの共通原因は存在しないように見える。しかし、ベルの不等式を導く際の共通原因は4つの相関に共通した共通原因となっていて、いわば共通の共通原因となっている (Hofer-Szabo, Redei and Szabo 1999)。したがって、ベルの不等式の破れは共通の共通原因が存在しないということを示しているが、

Reichenbach's common cause in quantum probability theories

Yuichiro KITAJIMA

共通原因で閉じているかどうかは自明な問題ではない。

ここでは、非相対論的量子力学における確率空間は共通原因で閉じていないのに対して、代数的場の量子論における確率空間は共通原因で閉じていることを示す。

2 ライヘンバッハによる共通原因の定義

例えば、1の目が出る確率が1/6であるようなさいころを二つ振って、1の目が同時に出る確率が1/36より大きければ、二つのさいころの間には何らかの相関があると考えよう。このような相関は一般的に次のように定義される。

定義1 (確率的な相関) 事象Aと事象Bの確率をそれぞれ $p(A)$ と $p(B)$ とする。

$$p(A \wedge B) > p(A)p(B)$$

のとき、事象Aと事象Bは確率的に相関しているという。

事象Aと事象Bが確率的に相関していることは、 $p(B|A) > p(B)$ かつ $p(A|B) > p(A)$ ということと同値である。つまり、事象Aと事象Bが確率的に相関しているということは、事象Bのみが起こる確率より事象Aのもとで事象Bが起こる確率が高く、かつ事象Aのみが起こる確率より事象Bのもとで事象Aが起こる確率が高いということである。

我々は二つの事象に確率的な相関があれば何らかの共通の原因があると考え、その原因を用いてその相関を説明しようとするだろう。例えば、二つのさいころを振って1の目が出る確率が1/36より大きければ、机の下に磁石が隠されているなど何らかの仕掛け、つまり二つの事象の共通原因を探さう。

Reichenbach (1956)は共通原因を次のように定式化した (p.159)。

定義2 (ライヘンバッハによる共通原因) 事象Cはであり、かつ以下の式を満足するとき、事象Cは事象Aと事象Bの共通原因という。ただし、 $\neg C$ はCの否定とする。

$$p(A \wedge B|C) = p(A|C)p(B|C)$$

$$p(A \wedge B|\neg C) = p(A|\neg C)p(B|\neg C)$$

$$p(A|C) > p(A|\neg C)$$

$$p(B|C) > p(B|\neg C)$$

Reichenbach (1956)は、事象Aと事象Bに対して共通原因Cが存在すれば、事象Aと事象Bは必ず確率的に相関していることを示した (Reichenbach, 1956, pp.159-160)。しかし、その逆、つまり二つの事象が確率的に相関しているとき、確率空間がその相関の共通原因を含んでいるかどうかは明らかでない。4節で、この問題を非相対論的量子力学と代数的場の量子論の枠組みで考える。

3 非相対論的量子力学と代数的場の量子論

非相対論的量子力学は相対論を考慮に入れないのに対して、代数的場の量子論は相対論を考慮に入れる。この節ではどちらの理論でも、ある状態で空間的に離れた二つの事象が確率的に相関していることがあるということを確認する。

まず、非相対論的量子力学の場合から考えよう。空間的に離れた二つの事象が確率的に相関している有名な例は、Einstein, Podolsky and Rosen (1935)で提案された状態を Bohm (1981)がスピンを使って考えた状態である。この状態では、二つの空間的に離れた粒子1と粒子2を考える。この状態において、粒子1のz方向のスピンの向きが上向きである確率は1/2、粒子2のz方向のスピンの向きが下向きである確率は1/2であり、さらに粒子1のz方向のスピンの向きが上向きであり、かつ粒子2のz方向のスピンの向きが下向きである確率は1/4ではなく、1/2となる。つまり、粒子1と粒子2は空間的に離れているが、粒子1のz方向のスピンの向きが上向きであるという事象と、粒子2のz方向のスピンの向きが下向きであるという事象は、確率的に相関している。

次に、代数的場の量子論を考えよう。非相対論的量子力学ではヒルベルト空間上の自己共役作用素によって観測可能量を表すが、この観測がいつどこで行われたかについては明確ではない。それに対して代数的場の量子論では、いつどこで観測が行われたかについても考慮し、さらに特殊相対性理論も考慮に入れた上で理論を構築している。具体的には次のように定式化されている。

ミンコフスキー空間の有界な開集合Oにフォン・ノイマン代数 $N(O)$ を対応させる。 $N(O)$

に含まれる射影作用素が $\mathcal{O}$ における観測命題をあらわす。そして、この射影作用素を使って、ある状態のもとでの観測命題の確率を計算する。さらに、局所代数には物理的に妥当な条件を課する。どのような条件を課するかに関してはいくつかの立場があるが、本稿では微視的因果律、シュリーダー性質、そして局所代数が固有無限であるという条件のみを課する (cf. Baumgartel 1995)。以下では、局所代数のネットはこれらの条件を満足しているとする。このとき、二つの時空領域 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ が空間的に離れていたら、これらの時空領域に対応する局所代数 $N(\mathcal{O}_1)$ と $N(\mathcal{O}_2)$ が生成するフォン・ノイマン代数上に正規状態 φ と射影作用素 $P_1 \in N(\mathcal{O}_1)$ と $P_2 \in N(\mathcal{O}_2)$ が存在して、 φ において P_1 と P_2 は確率的に相関している (Kitajima 2013, Theorem 3)。

このように、非相対論的量子力学においても代数的場の量子論においても、空間的に離れた二つの事象が確率的に相関していることがある。

これら二つの理論の共通点は、観測命題は射影作用素で表され、射影作用素の集合はフォン・ノイマン代数となっていることである。フォン・ノイマン代数に含まれる射影作用素全体の集合は、射影作用素の通常の順序関係でオーソモジューラー束となる。オーソモジューラー束とは、 $a \leq b$ ならば $b = a \vee (a^\perp \wedge b)$ という条件をみたす束である。例えば、ブール代数はオーソモジューラー束の例となっている。

オーソモジューラー束 L 上に確率測度は次のように定義される。

定義3 φ を L から実数全体の集合への写像とする。互いに直交する可算無限個の要素 a_i に対して、

$$\varphi(\bigvee a_i) = \sum \varphi(a_i)$$

となるとき、 φ を L 上の確率測度という。

本稿で重要な役割を果たす L の φ 原子元は次のように定義される。

定義4 a をオーソモジューラー束 L の要素、 φ を L 上の確率測度とする。 $b \leq a$ なる任意の $b \in L$ に対して、 $\varphi(b) = 0$ もしくは $\varphi(b) = \varphi(a)$ となるとき、 a を φ 原子元とよぶ。

大雑把に述べると、 φ 原子元とは、 L において 0 でない最も小さい要素である。

ここでは、簡単のために、確率測度は忠実であると仮定する。

定義5 φ をオーソモジューラー束 L 上の確率測度とする。任意の $a \in L$ に対して $\varphi(a) = 0$ のとき $a = 0$ のとき、 φ を忠実であるという。

φ 原子元をもちいて、非相対論的量子力学と代数的場の量子論の違いを述べるができる。非相対論的量子力学は I 型のフォン・ノイマン代数で記述されるのに対して、代数的場の量子論の局所代数は III 型のフォン・ノイマン代数で記述される。したがって、I 型のフォン・ノイマン代数は φ 原子元をもつものに対して、III 型のフォン・ノイマン代数は φ 原子元をもたない。この違いは、共通原因で閉じているかどうかを考える違いを考える際、重要な役割を果たす。

4 量子確率論における共通原因

非相対論的量子力学でも代数的場の量子論でも、空間的に離れた二つの射影作用素は両立可能という条件をみたす。これは、二つの観測命題が因果的に独立であるということを表している。

定義6 a と b をオーソモジューラー束 L における要素とする。

$$a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^\perp)$$

となるとき、 a と b は両立可能という。

$a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^\perp)$ と $b = (b \wedge a) \vee (b \wedge a^\perp)$ は同値であるので、両立可能という条件は対称的な条件である。この条件を使うと、オーソモジューラー束における確率的な相関は次のように定義される。

定義7 a と b をオーソモジューラー束 L における要素、 φ を L 上の確率測度とする。

$$\varphi(a \wedge b) > \varphi(a)\varphi(b)$$

であり、 a と b が両立可能であるとき、 φ において a と b は確率的に相関しているという。

オーソモジューラー束におけるライヘンバッハの共通原因は、古典的確率論と同様に定義できる。

定義8 (Kitajima and Redei, Definition 2) a と b をオーソモジューラー束 L における要素、 φ

をL上の確率測度とする。Lの要素cがaとbと共に両立可能であり、

$$\begin{aligned} & \varphi(a \wedge b \wedge c) / \varphi(c) \\ &= (\varphi(a \wedge c) / \varphi(c)) (\varphi(b \wedge c) / \varphi(c)) \\ & \varphi(a \wedge b \wedge c^\perp) / \varphi(c^\perp) \\ &= (\varphi(a \wedge c^\perp) / \varphi(c^\perp)) (\varphi(b \wedge c^\perp) / \varphi(c^\perp)) \\ & \varphi(a \wedge c) / \varphi(c) > \varphi(a \wedge c^\perp) / \varphi(c^\perp) \\ & \varphi(b \wedge c) / \varphi(c) > \varphi(b \wedge c^\perp) / \varphi(c^\perp) \end{aligned}$$

という式を満足するとき、aとbの相関に対する共通原因という。

この定義が、古典的確率論におけるライヘンバッハの共通原因に対応していることは容易にわかる。また、古典的確率論の場合と同様に、aとbの相関に対する共通原因があるならば、aとbは確率的に相関していることを示すことができる。しかし、aとbが確率的に相関しているときに、そのオーソモジューラ束がその相関の共通原因を含んでいるとは限らない。それを要請する条件が、次の共通原因で閉じているという性質である。

定義9 (Kitajima and Redei, Definition 3) φ をオーソモジューラ束L上の確率測度とする。aとbが φ において確率的に相関しているならばその相関の共通原因をLが含まれているとき、Lは共通原因で閉じているという。

次に示すように、この条件は φ 原子元と密接な関係がある。

定理10 (Kitajima and Redei, Proposition 14) Lをフォン・ノイマン代数の射影作用素によるオーソモジューラ束、 φ をL上の忠実な確率測度とする。Lは $\varphi(a \wedge b) > \varphi(a)\varphi(b)$ なる要素aとbを含んでいるとする。このとき、以下の条件は同値である。

1. Lは共通原因で閉じている。
2. Lに含まれる φ 原子元は高々1個である。

非相対論的量子力学を記述するフォン・ノイマン代数は複数個の φ 原子元を含むのに対して、代数的場の量子論を記述するフォン・ノイマン代数は φ 原子元を含まない。したがって、上の定理によれば、非相対論的量子力学を記述するフォン・ノイマン代数は共通原因で閉じていないのに対して、代数的場の量子論を記述するフォン・ノイマン代数は共通原因で閉じている。

5 おわりに

ここでは、非相対論的量子力学と代数的場の量子論が共通原因原理を支持する証拠とみなせるかどうかを考えた。そのために、これらの理論を記述する確率空間、つまりオーソモジューラ束が共通原因で閉じているかどうかを検討した。

まず定理10において共通原因で閉じているフォン・ノイマン代数の射影作用素によるオーソモジューラ束を特徴付けた。その結果に基づくと、非相対論的量子力学における確率空間は共通原因で閉じていないのに対して、代数的場の量子論における確率空間は共通原因で閉じているということが示せる。したがって、相対論を考慮に入れない非相対論的量子力学は共通原因原理の証拠とはみなせないのに対して、相対論も考慮に入れている代数的場の量子論は共通原因原理の証拠とみなせることになる。

「参考文献」

- 1) Baumgartel, H., Operator Algebraic Methods in Quantum Field Theory, Akademie Verlag, 1999.
- 2) Bohm, D., Quantum Theory, Dover, 1981 [1951].
- 3) Bub, J., Interpreting the Quantum World, Cambridge University Press, 1999.
- 4) Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N., "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?", Physical Reviews, 47, 1935, pp. 777-780.
- 5) Hofer-Szabo, G., Redei, M. and Szabo, L. E. "On Reichenbach's common cause principle and Reichenbach's notion of common cause", British Journal for the Philosophy of Science, 50, 1999, pp.355-377.
- 6) Kitajima, Y. "EPR states and Bell correlated states in algebraic quantum field theory", Foundations of Physics, 43, 2013, pp. 1182-1192.
- 7) Kitajima, Y. and Redei, M. "Characterizing common cause closedness of quantum probability theories", Studies in History and Philosophy of Modern Physics, to appear.
- 8) Reichenbach, H. The Direction of Time, New York, Dover, 1956.