ISSN 2186-5647

DAPの双対過程、ならびに認知プロセスとしてのDAP

日大生産工(非常勤)　○篠原　正明

情報システム研究所　篠原　健

1. はじめに

本論文はAHPにおける動的平均化プロセスDAPに関して、2つの観点からその動的過程を考察する。第1の観点は、既存のDAPを主過程と考え、その双対過程（さらには、逆過程、随伴過程）を考案し、それらの意味、関係、諸性質を考察する。第2の観点は、DAPを人間（さらには、動物、生物一般）の認知過程ならびに認識過程の数理モデルとしてとらえ、人間の神経系ならびに脳内での情報処理の課題、特に、「人間の成長発達とDAP」と「老年期における認知症」、について考察する。

2. DAPの双対過程

項目数=n、Aを（時不変な）比較行列として、完全情報下のDAPを考察する。既存のDAPを主過程(1)とし、その双対過程の更新式を(2)に示す。

$$x(t+1)=\frac{1}{n}Ax(t) \quad (1) \qquad y(t+1)=\frac{1}{n}A^{T}y(t) \quad (2)$$

主過程：項目iの項目jから見たウェイト「$a_{ij}x_j(t)$」を、j=1,…,nについて算術平均することにより、項目iの新ウェイト$x_i(t+1)$を更新する。……動的に平均化するプロセス！

双対過程：項目iの項目jからの換算分「$a_{ji}y_j(t)$」を、j=1,…,nについて算術平均することにより、項目iの新換算値$y_i(t+1)$を更新する。

次にn=3の具体例として、「円、ドル、ユーロ」3通貨間の外国為替レートの問題について説明する。

〔例1〕3通貨・外国為替の例

n=3の主、双対過程の式を(3)～(5)、(6)～(8)に示す。

〔主過程〕$x_1(t+1)=\{a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+a_{13}x_3(t)\}/3$　(3)

$x_2(t+1)=\{a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+a_{23}x_3(t)\}/3$　(4)

$x_3(t+1)=\{a_{31}x_1(t)+a_{32}x_2(t)+a_{33}x_3(t)\}/3$　(5)

〔双対過程〕$y_1(t+1)=\{a_{11}y_1(t)+a_{21}y_2(t)+a_{31}y_3(t)\}/3$　(6)

$y_2(t+1)=\{a_{12}y_1(t)+a_{22}y_2(t)+a_{32}y_3(t)\}/3$　(7)

$y_3(t+1)=\{a_{13}y_1(t)+a_{23}y_2(t)+a_{33}y_3(t)\}/3$　(8)

$a_{ii}=1$とし、項目1、2、3を各々百円、ドル、ユーロに対応させ、例えば、1ドル=120円=1.2百円、1ユーロ=1.5百円、1ユーロ=1.25ドル、とするならば、$a_{21}=1/a_{12}=1.2$、$a_{31}=1/a_{13}=1.5$、$a_{32}=1/a_{23}=1.25$となる。なお、本例ではa_{ij}に逆比性を仮定し、CI=0であるが一般にはその限りでない。x(0)=1とし、主過程(3)～(5)に従うと、t=1以降、$x_1:x_2:x_3=10:12:15$と、百円：ドル：ユーロの価値の比率を与える。すなわち、主過程は一般に各項目の「価値決定プロセス」と言える。一方、双対過程では、y_iを項目iでの資金（より一般的には資産、資源、効用）の持ち分と考える。資産を円で持つか、ドルで持つか、ユーロで持つかの資産の外国通貨分散投資の問題としてとらえる。双対過程(6)～(8)は一般には(9)となるが、(9)式の最右辺より、項目jでの資産の1/nを、a_{ji}で変換して項目iでの資産に変換し、それをすべての項目jについて総和するプロセスとなる。

$$y_i(t+1)=(\Sigma_j a_{ji}y_j(t))/n=\Sigma_j a_{ji}(y_j(t)/n) \qquad (9)$$

すなわち、手持ちの各外国通貨を均等分割し、各々の通貨に変換する「資産均等分散プロセス」、あるいは「等価交換プロセス」、と言える。y(0)=1とし、双対過程(6)～(8)に従うと、t=1で収束し、$y_1:y_2:y_3:=6:5:4$と、百円：ドル：ユーロでの資産保持割合を与える。資産均等分散の観点からは、価値が最低の百円換算で全資金の40%を保持することを示唆する。なお、本例では（CI=0なので）、各通貨毎の総価値x_iy_i＝一定、「$x_1y_1=x_2y_2=x_3y_3$　(10)」がt=1から成立。〔例1終り〕

以上は外国為替の例だが、一般の代替案、評価基準に相当する項目を対象とする場合は、「効用均等分散プロセス」と考える。例えば、「りんご」、「ミカン」、「バナナ」の好き度合（効用）を比較する場合は、各果物を持分の1/3を他の果物と効用等価交換し、最終的に各果物毎に好き度合効用x_iy_iが等しくなるように目指すプロセスである。

3. DAPの4過程：主、双対、随伴、逆過程への展開

主、双対過程に随伴、逆過程を加えて、(11)～(14)に完全情報DAPの4過程の更新式ならびに対応する固有ベクトル関係式を示す。又、図1に4過程の間の関係を図示した。

Dual Process of DAP, and DAP as a cognitive process

Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

主過程　: $x(t+1)=\frac{1}{n}Ax(t)$, $\lambda_X x=\frac{1}{n}Ax$ (11)

双対過程 : $y(t+1)=\frac{1}{n}A^Ty(t)$, $\lambda_Y y=\frac{1}{n}A^Ty$ (12)

随伴過程 : $u(t+1)=n(A^T)^{-1}u(t)$ $(u(t)=\frac{1}{n}A^Tu(t+1))$,

$\lambda_U u=n(A^T)^{-1}u$ (13)

逆過程 : $v(t+1)=nA^{-1}v(t)$ $(v(t)=\frac{1}{n}Av(t+1))$, $\lambda_V v=nA^{-1}v$ (14)

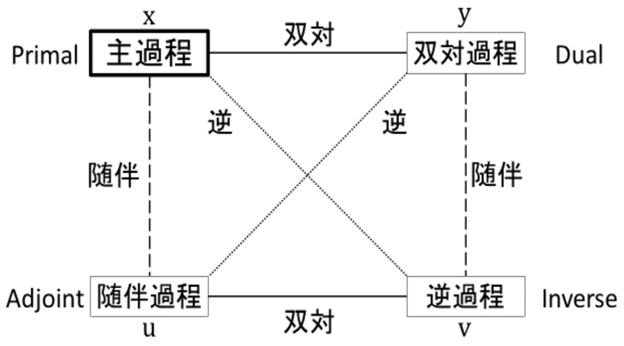


図１：離散時間 DAP の４過程の関係図

$\boxed{\text{双対関係}}$: 更新式の係数行列が転置の関係にあり、「x⇔y」のみならず「u⇔v」が双対関係にある。

性質 D1 : 比較行列 A が整合的なら（CI=0）、項目 i によらず x_iy_i＝一定、ならびに、u_iv_i＝一定(15)、に t=1 で即時に収束する。

性質 D2 : 比較行列 A が非整合的でも（CI≠0）、逆比性が成立すれば、項目 i によらず x_iy_i＝一定、ならびに、u_iv_i＝一定(16)、に漸近的に収束する。

性質 D3 : $\lambda_X=\lambda_Y$、ならびに　$\lambda_U=\lambda_V$ (17)

$\boxed{\text{随伴関係}}$: A の逆行列 A^{-1} が存在すれば、前進更新式(13)が定義できる。「x⇔u」、「y⇔v」が随伴関係にある。$|A|=0$ で A^{-1} が存在しなくても、後退更新式（(13)の括弧内）は定義できる。

性質 A1 : $x(t+1)^Tu(t+1)=x(t)^Tu(t)$ 、ならびに $y(t+1)^Tv(t+1)=y(t)^Tv(t)$ (18)

$\boxed{\text{逆関係}}$: A の逆行列 A^{-1} が存在すれば、前進更新式(14)が定義できる。「x⇔v」のみならず「y⇔u」が逆関係にある。

$|A|=0$ で A^{-1} が存在しなくても、後退更新式（(13)、(14)の括弧内）は定義できる。これらは主過程の時間を逆行させた時の過程である。時間を逆行させた逆過程を(14)より新たに(19)で定義する。$v(t-1)=\frac{1}{n}Av(t)$ $(\mu_V v=\frac{1}{n}Av)$ 、ならびに $u(t-1)=\frac{1}{n}Au(t)$ $(\mu_U u=\frac{1}{n}Au)$ (19)

すなわち、t→-∞を極限・定常状態とする時間逆行過程である。

性質 I1 : $v(0)=x(0)$ とすると、$v(-t)=x(t)$、ならびに $u(0)=y(0)$ とすると、$u(-t)=y(t)$ (t>0) (20)

性質 I2 : $v(t_1)=x(t_2)$ とすると、$v(t_1-t)=x(t_2+t)$,ならびに $u(t_1)=y(t_2)$ とすると、 $u(t_1-t)=y(t_2+t)$ (t>0) (21)

性質 I3 : $\lambda_X=\mu_V$、ならびに $\lambda_Y=\mu_U$ (22)

ここで、λ_X は主過程での主固有値（定常成長率）、μ_V は逆過程(t→-∞)での主固有値, λ_Y は双対過程での主固有値、μ_U は随伴過程(t→-∞)での主固有値である。

性質 I4 : $|A|\neq 0$ で A^{-1} が存在する場合、一般に λ_X と逆過程(14)の主固有値 λ_V との間には、$\lambda_X\cdot\lambda_V\neq 1$、ならびに $\lambda_Y\cdot\lambda_U\neq 1$ (23)

〔注釈〕$Ax_{max}=\lambda_{max}x_{max}$ ならば、$A^{-1}x_{max}=\lambda_{max}^{-1}x_{max}$ であるが、ここで問題としているのは主固有値、主固有ベクトルである。たとえ、λ_{max} , x_{max} が A の主固有値、主固有ベクトルであっても、一般には、λ_{max}^{-1} , x_{max} は A^{-1} の主固有値、主固有ベクトルにはなりえない。λ_{min} を絶対値最小の固有値、x_{min} をその固有ベクトルとすれば、それらが A^{-1} の主固有値、主固有ベクトルである。

性質 I5 : A^{-1} が存在する場合、$v(0)>0$ でも $v(t)$ (t>0) は正値が保証されない、$u(0)>0$ でも $u(t)$ (t>0) は正値が保証されない。

4. 認知過程としての DAP

4.1 情報処理システムとしてのモデル化

人間を例にとり、我々の認知過程が成長と共にどのように発達、衰退するかを数理モデル化する。認知過程は大きく神経系と脳内系に分けられ、本稿では前者を知覚過程、後者を認識過程と呼び、区別する[認知＝認識(認知)＋知覚]。情報処理システムとして見ると、神経系と脳内系への入力はいずれもストリーム的である(前者への入力の方がより実時間的かつ連続的であるが)。待ち行列ネットワークとしてモデル化するならば、神経系での待ち容量は微小(ほとんど蓄積不可)であり、脳内系での待ち容量は相対的に大きく、蓄積可能(即ち、stored program となる)である。待ち時間 Tw＋認知時間 Tc＝系内時間 T は、神経系では情報処理結果の実時間性を保つため微小であり、脳内系では相対的に大きい（半実時間性）と言える。いずれの系でも、情報処理サービスとしては、比較行列 A にもとづく DAP が動作しており、サービス終了時点での DAP 途中結果が認知（認識、知覚）結果となる。それに相当する時間が認知時間 Tc となり、系内時間 T が小さいほど迅速な認知動作に対応する。より正確な認知結果を出力するためには、DAP 反復を繰り返す必要があるが、認知処理のために長い処理時間を要し、その結果時間がかかり、実時間性が損なわれる。迅速な認知処理機能実現のためには、認知処理速度を高

め、系内時間を短縮することがいずれの系でも肝要である。認知処理系設計に当たっては、正確性と実時間性の間にトレードオフが存在することがわかる。

4.2 認知過程の成長・衰退

初期ならびに成長期における人間の認知過程は、DAP の観点からは、①比較行列 A の発達、②認知時間 Tc 内での反復回数増加、で特徴づけられる。Tc 内反復回数が増加するのは処理速度が向上することに由来し、視覚で言えば視力向上に相当する。処理速度が向上すれば精度を保持しつつ、Tc を減少させ、実時間性（反応速度）を高めることもできる。

①神経系においては、赤子→幼児→児童と肉体の発達と共に、不完全情報 DAP の比較行列中のデータは知覚精度の改良が進み、青年期に完成し、壮年期と停滞し、その後、老化による肉体の衰えと共に比較データの精度、質は共に劣化を開始する。認知時間 Tc に関しては、同様に肉体の発達と共に情報処理速度が向上し、Tc＝一定とすれば、DAP の反復回数が増加し、精度の良い知覚・認知結果を得ることが出来る。視覚で言えば、赤子の時よりもその後の児童期にて視力向上が達成される。青年期にて知覚処理速度は最大となり、その後、停滞、劣化する。

②脳内系においては、認識概念の基礎が生命の発生後の誕生～赤子の時期に形成される。これは原始体験比較行列 A_{origin} とでも言うべきもので、基礎的な項目群から構成され、項目数も多くはなく、精度も悪く、かつ欠落部が多い不完全情報である。その後、赤子→幼児→児童→青年と年齢を経て、勉学に励む、等様々な経験を積み重ねることにより、原始体験比較行列 A_{origin} を土台として、その後の比較行列はネットワーク化、クラスター化、構造化を通して巨大に成長する。従って、我々がある事柄についての認識過程に注目する時は、超巨大な脳内系の比較行列のほんの一部を切り出している。老化と共に（個人差はあるが）、比較行列の規模とデータ精度は共に劣化し、成長期に赤子→幼児→児童→青年と辿った経路と真逆の経路を辿ることになる(「三つ子の魂、百まで」)。なお、人間の脳内系で特質すべきは、計算機システムの外部記憶装置の様に、比較行列の一部分を外部知識データベースに関与させることが出来る点で、この方法に習熟した場合には、比較行列の劣化に基づく認識力低下は最低限に食い止められる。又、Tc 内反復回数は頭の回転スピードのごとき概念なので、勉学の努力などを通して、回転スピードを向上することが、青年期までは可能であろう。その後は、停滞し、劣化する。

5. 認知症の数理モデル

5.1 ボケ老期での認知

図２において、Tc 内反復回数を k とすると、A^k が認知結果となるので、生命の発生から誕生期においては、A^0=I（単位行列）、A^1=A（1 ステップ原始体験比較行列）が認知される。その後、A^2, A^3, A^4,…と多ステップでの認知が達成されるが、老年期以降では、A^2→A^1→A^0=I と退行現象が観察できる。ここで、k=1（三つ子の魂）から k=0（完全痴呆）の間は、例えば k=0.5, 小数べき乗行列 $A^{0.5}$（平方根行列$\sqrt{A}$）の様相を調べることにより、老化による認知症メカニズム解明が期待できる。なお、k 増加時の 0<k<1, 1<k<2, 2<k<3 の切り替わり時期が、それぞれ, 幼児期、思春期、壮年期、等の不安定な精神症状に対応する。

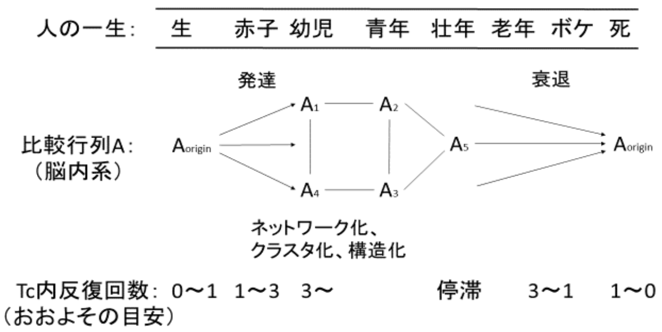


図２：人間の一生と認知過程の変化

5.2 平方根行列$\sqrt{A}$の評価

平方根行列$\sqrt{A}$ ＝$A^{0.5}$を X とすると、X^2=A　(24)が成立する。A と$\sqrt{n}$X(n=3)に逆比性を仮定し(25)、n=3 の場合に(24)を整理すると、(26)を得る。

$$A=\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 1/a & 1 & c\\ 1/b & 1/c & 1\end{bmatrix},\quad \sqrt{3}\mathrm{X}=\begin{bmatrix}1 & x & y\\ 1/x & 1 & z\\ 1/y & 1/z & 1\end{bmatrix} \qquad (25)$$

$$\begin{bmatrix}3 & 2x+\dfrac{y}{z} & 2y+xz\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{z}{y} & 3 & 2z+\dfrac{y}{x}\\ \dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{xz} & \dfrac{2}{z}+\dfrac{x}{y} & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3a & 3b\\ \dfrac{3}{a} & 3 & 3c\\ \dfrac{3}{b} & \dfrac{3}{c} & 3\end{bmatrix} \qquad (26)$$

行列方程式(26)の上三角部分の 3 要素に注目すると、(27)～(29)を得る（3 要素のみに注目することの妥当性については、〔コメント 5.3〕と〔性質 5.3〕を参照)。

2x+y/z=3a　(27),　2y+xz=3b　(28),　2z+y/x=3c　(29)

非線形連立２次方程式(27)～(29)を解くと、以下の解を得る。

$$x=a(1\pm\sqrt{1-\Delta})\ \ (30),\qquad z=c(1\pm\sqrt{1-\Delta})\ \ (31),$$

$$y=b\left\{\frac{1}{\Delta}\mp\frac{1}{\Delta}\sqrt{1-\Delta}\right\}\ \ (32)\qquad 但し、\Delta=\frac{b}{ac}\ \ (33)$$

5.3 老齢期認知症のメカニズム

平方根$\sqrt{1-\Delta}$が実数となるためには、Δ≦1　(34)が必要であ

り、もしΔ>1　(35)となると、x、y、z が複素数となり、虚数が発生する。一対比較判断値に虚数が入ると、「虚の虚は否定(i×i＝－1)」、「否定の否定は肯定(－1×－1＝＋1)」、など、実数値一対比較での判断では見られない状況が発生する。この虚数が一対比較値に混入した状況が認知症の数理的解釈と考えられる。

〔コメント 5.1〕[1]において複素数一対比較値を考慮した意思決定判断の様相を導入した。この AHP 国際会議・論文発表の質疑応答時に、Saaty 博士より、「Q1:複素数、虚数の意味は？」、「Q２:四元数、八元数では？」との質問を頂いた。以下にその回答を示す。「A1: 不確定性・あいまいさ(ambiguity)を意味する。万物は振動しており、複素空間での振動(oscillation, vibration)の表れとして実現象が存在する。」、「A２:思考空間の不確定性の次元はいくつか？　ある種の完備性条件下では、四次元、八次元と言えるが、人間の思考空間は、必ずしもその条件には拘束されない。」

<u>性質 5.1</u>：(35)の条件「Δ>1」、すなわち、(25)の通常の比較行列 A において b>ac　(36)が成立⇔平方根行列$\sqrt{A}$ ＝$A^{0.5}$＝X の要素に虚数が混入する。

<u>性質 5.2</u>：a>0 , b>0 , c>0 とすると、Δ>0　(37)、これと(34)とあわせて、X が実数行列であるためには、0＜Δ≦1　(38)

〔コメント 5.2〕性質 5.2 より X が実数行列であるためには、Δ≦1 すなわち b≦ac　(39)となるが、これは、(1→3)項目間の直接比較値 b よりも、(1→2)(2→3)の 2 ステップでの間接比較値 ac の方が大きいことを意味する。すなわち、直接的判断（時に感情的）よりも 2 ステップ、3 ステップ経由の間接的判断（時に論理的）の方が強いと、老齢期に認知症になりにくいと言える。

〔コメント 5.3〕(25)の 3×3 比較行列において、判断意志が明確に出る一対比較値(a, b, c)を上三角部分に配置した。すなわち、a≧1, b≧1, c≧1（より強くは、a>1, b>1, c>1）を前提とする。そして、その部分に関して行列方程式(26)が成立するとして、(27)～(29)を解いた。

<u>性質 5.3</u>：A に整合性があるとき（Δ=1）、行列方程式(24), (26)は全要素で成立し、不整合時には下三角部分の(2,1), (3,1), (3,2)要素では、両辺の等号は一般には成立しない。

<u>性質 5.4</u>：Δ=1 ならば、X^2/n に逆比性が成立する。

６．おわりに

DAP の４過程(主、双対、逆、随伴過程)を提起し、DAP とヒトの認知過程との関連を考察した。4 章の考察より認知処理系が待ち時間制限(Tout＝Tc)付き待ち行列システムであること、5 章の考察より一対比較デザイングラフにおける優越木(さらには、全順序優越木)の存在が確固たる意思決定を裏付けること、を示唆した。関連した最近の研究として、視覚処理への適用[2]、逆問題(逆過程の AHP)との関連[3]も参照のこと。連続時間 DAP の４過程については付録 1 を参照のこと。なお、逆過程が明示的に成立するためには、A^{-1}が存在する必要があり、その条件を n=3 の場合について付録２で考察する。

付録１：連続時間 DAP の４過程（但し、A/n を A とした）

主過程：$\frac{dx(t)}{dt}$=logAx(t)　　(A1・1)　双対過程：$\frac{dy(t)}{dt}$=logA^Ty(t)　(A1・2)

随伴過程：$\frac{du(t)}{dt}$=－logA^Tu(t) (A1・3)　逆過程：$\frac{dv(t)}{dt}$=－logAv(t)（A1・4)

但し、logA=(A-I)-$(A-I)^2$/2+$(A-I)^3$/3-⋯　　(A1・5)

付録２：比較行列の逆行列 A^{-1} の存在条件(n=3)

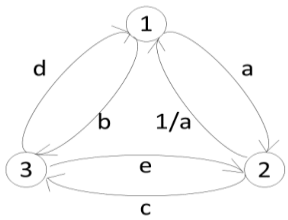
〔2.1〕CI=0　→　|A|=0　（逆は不成立，n≧3 でも成立）

〔2.2〕A の 3 要素で逆比性成立の前提：CI=0⇄|A|=0.

〔2.3〕CI≠0、A の 2 要素で逆比性成立、残り 1 要素で不成立の前提：右回りか左回りで閉路積=1（右回りか左回りの一方で整合性がある）⇄|A|=0.

〔2.4〕CI≠0、A の 1 要素で逆比性成立、残り 2 要素で不成立の前提：比較行列を具体的に A=$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1/a & 1 & c \\ d & e & 1 \end{pmatrix}$とする。ad=e あるいは ac=b が成立⇄|A|=0.

|A|= (ad-e) (c-b/a)なので、ad=e あるいは c=b/a が成立すれば、|A|=0 となる。〔2.3〕では閉路積=1 であったが、〔2.4〕では閉路積=1 は不成立である。



図Ａ１：付録２〔2.4〕のデザイングラフ

参考文献

〔1〕Chikako MIYAKE, Keikichi OHSAWA, Masahiro KITO, and Masaaki SHINOHARA: COMPLEX NUMBER PAIRWISE COMPARISON AND COMPLEX NUMBER AHP, ISAHP 2003, Bali, Indonesia, August (2003.8)

〔2〕平澤 遼: 神経ネットプロセス NNP/AHP にもとづく画像処理特性に関する研究, 平成 26 年度日本大学大学院生産工学研究科修士論文(2015.2)

〔3〕新田 翔平：AHP とその逆問題に関する研究、平成 26 年度日本大学大学院生産工学研究科修士論文(2015.2)