

AHP 一対比較における順位逆転問題の改善に関する研究

日大生産工(学部) ○齋藤 嵩登 日大生産工 西澤 一友

1. まえがき

AHP (Analytic Hierarchy Process)は、複数の評価基準のもとで多数の代替案の中からの選択、複数の要素のすべてあるいは、複数の要素の評価や順位づけ、というタイプの決定問題の手法である。この手法の主な工程として、「問題の階層化」「一対比較」「ウェイトの計算」「総合評価値(重要度)の計算」の4つがある。

工程にある一対比較とは、主に9段階での比較を行う9点法を用いて、評価基準と代替案をすべての組み合わせにおいて比較することである。しかし、その際に適切な方法で比較を行わないと、評価順位の逆転現象が起きてしまう恐れがある。順位が逆転すると、本来選ばれるべき代替案とは別の代替案が選ばれる可能性があり、意思決定に大きな影響を及ぼす。

本研究ではその順位逆転現象を改善する方法を複数提案する。

2. 問題点

まず正常な一対比較行列を式(1)に示す。一対比較行列は評価基準に対して代替案同士を比べあい、1～9までの整数とその逆数で表現されている。また、この行列は対角要素が1になる。このような式(1)を、パワー法により主固有値($\lambda_{\max}$)と主固有ベクトル(ウェイト)を求め、主固有ベクトルより

評価順位を決める。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 7 \\ 1/2 & 1 & 4 & 2 & 9 \\ 1/3 & 1/4 & 1 & 2 & 5 \\ 1/7 & 1/2 & 1/2 & 1 & 3 \\ 1/7 & 1/9 & 1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

得られた結果を表1に示す。主固有ベクトル($w_1 \sim w_5$)は、最大値が1になるように正規化している。

表1 行列Aの主固有値と主固有ベクトル

$\lambda_{\max}$	5.275563
w_1	1.000000
w_2	0.672554
w_3	0.308351
w_4	0.205176
w_5	0.081310

一対比較行列は通常、式(1)のように対角要素が1であり、右上三角の要素が正の値である場合、表1のように主固有ベクトルは $w_1 > w_2 > \dots > w_5$ という順位になる。

次に、順位逆転現象が起きている一対比較行列を式(2)に示す。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 & 7 & 7 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1/7 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

こちらも式(1)と同様にパワー法を用いて解くが、問題が無ければ表1のような順序になるはずである。

その結果を表2に示す。

Study on the improvement of rank reversal problem
in the AHP pairwise comparisons

Shuto SAITO and Kazutomo NISHIZAWA

表2 行列Bの主固有値と主固有ベクトル

$\lambda_{\max}$	5.279619
w_1	0.951572
w_2	1.000000
w_3	0.423471
w_4	0.222246
w_5	0.139671

表2の結果では w_1 が2番目に大きく、 w_2 が最も大きい。つまり、 w_1 と w_2 で順位の逆転が起きている。また、式(1)と式(2)を一目見ても順序が逆転するかどうかはわからない。

3. 改善方法

逆転現象が起きてしまう一対比較行列を比較して、この現象が起きている行列にはある共通点があることを見つけた。逆転現象が起きている一対比較行列を行毎に注目し、それぞれの行毎の和の比較を行うと、逆転が起きている行と起きている行の和に違和感を覚えた。

そこで今回提案する改善方法として、それぞれ一対比較行列を行毎に注目し、その方法を方法1、方法2として提案する。

3.1 方法1

一対比較行列を行毎に注目し、パワー法を使わずにそれぞれ各行毎に計算を行い、ウェイトを求め、最後に正規化を行う。手順として次のⅠ～Ⅲの手順に従って行う。

- Ⅰ. 各行の数値の和を出す
- Ⅱ. 和を出す際に、行の数値が小数の場合は積に変える
- Ⅲ. 計算を行う際、対角要素は除いて計算を行う

この方法は一対比較行列をそのまま計算している為、右上三角の要素が正の値であ

る例に適用した場合、表1のように各ウェイトが $w_1 > w_2 > \dots > w_5$ という順位になることが望ましい。

3.2 方法2

まず、一対比較行列を転置行列に変換してからパワー法で解き、主固有値と主固有ベクトルをそれぞれ求める。手順として、次のⅠ～Ⅳで行う。

- Ⅰ. 一対比較行列を転置行列に変換
- Ⅱ. 転置行列をパワー法により解く
- Ⅲ. 転置行列を行毎に注目し、対角要素以外の整数の数を数える
- Ⅳ. Ⅲで作成した行列と主固有ベクトルの和を求め、最大値が1となるように正規化を行う

この方法は、行と列を入れ替える転置行列に変換をしている為、右上三角の要素が正の値である例に適用した場合は $w_5 > w_4 > \dots > w_1$ という順位になることが望ましい。

3.3 提案方法の適用例

式(2)を例に挙げ、方法1の手順を適用して計算を行うと、次の(3)式ようになる。

$$\begin{aligned}
 \text{1行目} &= 2+2+3+4=11 \\
 \text{2行目} &= 1/2 \times (3+7+7)=8.50 \\
 \text{3行目} &= 1/2 \times 1/3 \times (2+4)=1.00 \quad (3) \\
 \text{4行目} &= 1/3 \times 1/7 \times 1/2 \times 2=0.048 \\
 \text{5行目} &= 1/4 \times 1/7 \times 1/4 \times 1/2=0.0045
 \end{aligned}$$

式(3)の結果から、各行のウェイトを導き出す。なお、この方法ではウェイトを導き出すことは可能だが主固有値を導き出すことは出来ない。最後に最大値が1となるように正規化を行う。

方法1を適用して得られた各ウェイトを表3に示す。

表3 方法1の適用結果

w ₁	1.000000
w ₂	0.772727
w ₃	0.090909
w ₄	0.004329
w ₅	0.000406

方法2も同様に、式(2)について提案手順に従って適用をすると、以下ようになる。

I より、式(2)を転置行列Cに変換する。

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/3 & 1/7 & 1/7 \\ 2 & 3 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ 3 & 7 & 2 & 1 & 1/2 \\ 4 & 7 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

II より、式(4)からパワー法により、主固有値と主固有ベクトルを求める。

III より、式(4)を行毎に注目し、対角要素を除いた整数の数でDを作る。

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

IV より、求めた主固有ベクトルと式(5)のDとの和を求め、最大値が1となるように正規化を行う。

方法2を適用して得られた主固有値とウェイトを表4に示す。

表4 方法2の適用結果

$\lambda_{\max}$	5.279619
w ₁	0.092785
w ₂	0.196236
w ₃	0.396284
w ₄	0.683988
w ₅	1.000000

4 検証

方法1と方法2を様々な条件の例へ適用し、

順位逆転が改善されるかを検証して行く。

4.1 検証方法

右上三角の要素がすべて正の値で出来た一対比較行列を乱数により作成し、その中で1位と2位の逆転が起きている5行5列の例を60通り用意する。この例はそれぞれ整合度(Consistency Index (C.I.))別に分けている。一般に一対比較行列の整合度は0.1未満であると整合性がある、と言われていることから、整合性が高い(C.I.<0.08)、少し低い(0.08≤C.I.<0.12)、低い(0.12≤C.I.<0.20)という基準を設け、各20通りずつ用意した。

また、式(1)のような逆転が起こらない正常な例でも正しい結果が得られるのか、ということも検証を行う。こちらの例も先ほどの例と同じ条件で、乱数で一対比較行列を作成し、整合度別に計60通り用意をしてそれぞれの方法を適用した。

4.2 結果

表3と表4より、どちらの方法でもウェイトの値の結果が望み通りの順位になり、順位の逆転を改善することが出来た。

乱数より作成した各20通りの整合度別の例に方法1、方法2をそれぞれ適用した結果を表4に示す。順位逆転現象を防げた場合は改善、防げなかった場合は逆転に数える。

表5 方法1と方法2の適用結果

	方法1		方法2	
	改善	逆転	改善	逆転
C.I.<0.08	20	0	20	0
0.08≤C.I.<0.12	20	0	20	0
0.12≤C.I.<0.20	20	0	20	0
合計	60	0	60	0

表5の結果より、どちらの方法ともすべて順位逆転を改善することが出来た。

逆転現象が起こらない正常な例でも正しい結果が得られるかを検証した結果を次の表6に示す。こちらも表5と同様に、順位逆転現象を防げた場合は改善、防げなかった場合は逆転に数える。

表6 正常な例への適用結果

	方法1		方法2	
	改善	逆転	改善	逆転
C.I.<0.08	20	0	20	0
0.08≤C.I.<0.12	20	0	20	0
0.12≤C.I.<0.20	20	0	20	0
合計	60	0	60	0

表6より、逆転現象が起こらない正常な場合もすべて成功させることが出来た。

また、逆転現象が起きている場合と起きている場合どちらにも対応している、という表5と表6の結果を受けて、この2つの方法を逆転が起きない正常な例である式(1)に適用し、通常通り解いた表1の結果との差を調べることにした。

表1のウェイトの結果からそれぞれの方法で算出したウェイトの差を求め、差の和を求めることで誤差を算出し、その結果を表7に示す。なお、方法1は主固有値を求めることが出来ない為、表7からは省いて示す。

表7 表1とそれぞれの方法のウェイトの誤差

	表1－方法1	表1－方法2
w ₁	0.000000	0.952944
w ₂	0.277817	0.492382
w ₃	0.264491	-0.061160
w ₄	0.199537	-0.345370
w ₅	0.081254	-0.918690
誤差の和	0.823099	0.120000

表7より方法2の主固有値は変わらずに、元の方法との誤差も比較的少なく求めることが出来ているので、方法2は方法1よりも精度は高いと言える。

5 まとめ

今回は、主固有ベクトルで逆転が起きている部分に対応する一対比較行列の行の和に問題があると考えて2つの方法を提案し、以下のことが得られた。

- ・ 方法1, 方法2共にすべて改善することができた。
- ・ 方法1は簡易的な方法なので、すばやく手軽に順位逆転現象を防いで順位を出せる方法だが、主固有値を求めることが出来ず、また、ウェイトの値の精度も悪い。
- ・ 方法2は転置行列を利用している為、行列の大きさや主固有値、整合度などを変えずに主固有ベクトルを導けるが、プログラムなどを組むため計算に時間がかかってしまう。

また、方法1の計算結果の精度が悪い原因として、各行毎に積で計算している事が大きな要因であると考えられる。

今後のこの2つの方法の課題として、現時点では以下のことを考えている。

- ・ 5行5列以外のサイズの一対比較行列での検証や、表7の様な誤差の検証など検証の幅を広げる。
- ・ 例題の数を増やし、順位逆転現象が改善されないものが存在するかどうかを調べる。
- ・ 代替案の順位だけでなくウェイトの比率も正確に求める。