

連立非線形楕円型偏微分方程式の精度保証付き数値計算

に対する線形化逆作用素の一評価

早大基幹理工(院) ○関根 晃太 早大基幹理工 高安 亮紀
早大基幹理工 大石 進一 日大生産工 山崎 憲

1. はじめに

本報告では, 反応拡散方程式の定常状態を表す次のような連立 2 階楕円型偏微分方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u, v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta v = g(u, v) & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

の精度保証付き数値計算を考える. ここで, Ω は $\mathbb{R}^2$ の有界多角形領域とする. また, 作用素 $f: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), g: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ は Fréchet 微分可能であると

する. 著者らは連立 2 階楕円型偏微分方程式(1) に対する線形化逆作用素のノルム評価を提案した[1,2]. 本報告では連立 2 階楕円型偏微分方程式(1)に対し, 線形化逆作用素のノルムの新たな評価方法を考える.

2. 準備

$\forall u, w \in H_0^1(\Omega)$ について次の記号を定義する:

$$(u, w)_{L^2} := \int_{\Omega} u(x) \cdot w(x) dx,$$

$$(u, w)_{H_0^1} := (\nabla u, \nabla w)_{L^2}.$$

そのとき(1)の弱形式は次のようになる: Find $u, v \in H_0^1(\Omega)$ satisfying

$$\begin{cases} (u, w)_{H_0^1} = (f(u, v), w)_{L^2}, \forall w \in H_0^1(\Omega), \\ (v, w)_{H_0^1} = (g(u, v), w)_{L^2}, \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2)$$

$u \in H_0^1(\Omega)$ について線形線形作用素 $A: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}$ と非線形作用素 $N_1, N_2: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}$ をそれぞれ,

$$\langle Au, w \rangle := (\nabla u, \nabla w)_{L^2},$$

$$\langle N_1(u, v), w \rangle := (f(u, v), w)_{L^2},$$

$$\langle N_2(u, v), w \rangle := (g(u, v), w)_{L^2}$$

と定義する. $p := \{1, 2, \infty\}$ とし, 直積空間

$\mathbf{V}_p := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ と $\mathbf{V}_p^* := H^{-1} \times H^{-1}$ を定義する. また, $\mathbf{V}_p$ のノルムとして

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{V}_p} := \left\| \begin{pmatrix} \|u\|_{H_0^1} \\ \|v\|_{H_0^1} \end{pmatrix} \right\|_p.$$

と定義する. 但し, $u, v \in H_0^1(\Omega)$, $\mathbf{z} := (u, v)^T \in \mathbf{V}_p$ とし, $\|\cdot\|_p$ はベクトルの p -ノルムとする. 同様に, $\mathbf{V}_p^*$ のノルムとして,

$$\|\mathbf{z}^*\|_{\mathbf{V}_p^*} := \left\| \begin{pmatrix} \|u^*\|_{H^{-1}} \\ \|v^*\|_{H^{-1}} \end{pmatrix} \right\|_p.$$

但し, $u^*, v^* \in H^{-1}$, $\mathbf{z}^* := (u^*, v^*)^T \in \mathbf{V}_p^*$ とする. また, 線形作用素 $\mathbf{A}: \mathbf{V}_p \rightarrow \mathbf{V}_p^*$, 非線形作用素 $\mathbf{N}: \mathbf{V}_p \rightarrow \mathbf{V}_p^*$ を

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}(u, v) := \begin{pmatrix} N_1(u, v) \\ N_2(u, v) \end{pmatrix}$$

と定義する. 非線形作用素 $F_1: \mathbf{V}_p \rightarrow H^{-1}$ と $F_2: \mathbf{V}_p \rightarrow H^{-1}$ をそれぞれ,

$$F_1(u, v) := Au - N_1(u, v),$$

$$F_2(u, v) := Av - N_2(u, v),$$

と定義する. 但し, $u, v \in H_0^1(\Omega)$ とする. 非線形作用素 $\mathbf{F}: \mathbf{V}_p \rightarrow \mathbf{V}_p^*$ を

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) := \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{z}) \\ F_2(\mathbf{z}) \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{N}(\mathbf{z}),$$

とし, これは, $\mathbf{z} \in \mathbf{V}_p$ について Fréchet 微分可能である. ここで, $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = 0$ を満たす解 $\mathbf{z} \in \mathbf{V}_p$ を求める問題は(2)を求める問題と同じである. ここで X_h を $H_0^1(\Omega)$ の有限次元部分空間とし, H_0^1 -射影を P_h とし誤差定数 C_h をする. また, $\mathbf{V}_p^h$ を $\mathbf{V}_p$ の有限次元部分空間とし, $\hat{\mathbf{z}}$ を $\mathbf{V}_p^h$ の元とする.

次に Newton-Kantorovich の定理を紹介する.

An estimation of a linearized operator for a system of nonlinear partial differential equations

Kouta SEKINE, Akitoshi TAKAYASU, Shin'ich OISHI and Ken YAMAZAKI

定理 1 (Newton-Kantorovich) $p := \{1, 2, \infty\}$ とする. Fréchet 微分 $\mathbf{F}'[\hat{\mathbf{z}}]$ は可逆であり,

$$\|\mathbf{F}'[\hat{\mathbf{z}}]^{-1}\mathbf{F}(\hat{\mathbf{z}})\|_{V_p} \leq \alpha$$

を満たす正定数 α が存在する. 閉球 $\bar{B}(\hat{\mathbf{z}}, 2\alpha) := \{\mathbf{v} \in V_p : \|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{z}}\|_{V_p} \leq 2\alpha\}$ と開球 $D \supset \bar{B}$ とする. 正定数 ω を

$$\|\mathbf{F}'[\hat{\mathbf{z}}]^{-1}(\mathbf{F}'[\mathbf{w}] - \mathbf{F}'[\mathbf{m}])\|_{V_p, V_p} \leq \omega \|\mathbf{w} - \mathbf{m}\|_{V_p},$$

とする. 但し, $\forall \mathbf{w}, \mathbf{m} \in D$ とする. もし, $\alpha\omega \leq 1/2$ を満たすなら, $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = 0$ を満たす解 $\mathbf{z}$ は存在し

$$\|\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}\|_{V_p} \leq \frac{1 - \sqrt{(1 - \alpha\omega)}}{\omega}$$

を満たす. さらに, 解 $\mathbf{z}$ は D 内に一意である.

$$\text{ここでは } \|\mathbf{F}'[\hat{\mathbf{z}}]^{-1}\|_{V_p^*, V_p} \leq C_1, \quad \|\mathbf{F}(\hat{\mathbf{z}})\|_{V_p^*} \leq$$

$$C_2, \quad \|\mathbf{F}'[\mathbf{w}] - \mathbf{F}'[\mathbf{m}]\|_{V_p, V_p} \leq C_3 \|\mathbf{w} - \mathbf{m}\|_{V_p} \text{ とし,}$$

$\alpha = C_1 C_2$, $\omega = C_1 C_3$ とすることで, Newton-Kantorovich の定理を適用する.

3. 線形化逆作用素のノルム評価

定数 C_1 の求め方を示す.

定理 2

$\forall \phi_1, \phi_2 \in H_0^1(\Omega), \forall \phi_1^c, \phi_2^c \in H_0^1(\Omega) \setminus X_h$ について, 次の定数が存在すると仮定する:

$$\|P_h A^{-1} D_u N_1[\hat{\mathbf{z}}] \phi_1^c\|_{H_0^1} \leq K_1 \|\phi_1^c\|_{H_0^1},$$

$$\|P_h A^{-1} D_v N_1[\hat{\mathbf{z}}] \phi_2\|_{H_0^1} \leq K_2 \|\phi_2\|_{H_0^1},$$

$$\|P_h A^{-1} D_v N_2[\hat{\mathbf{z}}] \phi_2^c\|_{H_0^1} \leq K_3 \|\phi_2^c\|_{H_0^1},$$

$$\|P_h A^{-1} D_u N_2[\hat{\mathbf{z}}] \phi_1\|_{H_0^1} \leq K_4 \|\phi_1\|_{H_0^1},$$

$$\|D_u f[\hat{\mathbf{z}}] \phi_1\|_{L^2} \leq K_5 \|\phi_1\|_{H_0^1},$$

$$\|D_u f[\hat{\mathbf{z}}] \phi_1^c\|_{L^2} \leq K_6 \|\phi_1^c\|_{H_0^1},$$

$$\|D_v f[\hat{\mathbf{z}}] \phi_2\|_{L^2} \leq K_7 \|\phi_2\|_{H_0^1},$$

$$\|D_v g[\hat{\mathbf{z}}] \phi_2\|_{L^2} \leq K_8 \|\phi_2\|_{H_0^1},$$

$$\|D_v g[\hat{\mathbf{z}}] \phi_2^c\|_{L^2} \leq K_9 \|\phi_2^c\|_{H_0^1},$$

$$\|D_u g[\hat{\mathbf{z}}] \phi_1\|_{L^2} \leq K_{10} \|\phi_1\|_{H_0^1}.$$

また, 有限次元作用素

$P_h(I - A^{-1} D_u N_1[\hat{\mathbf{z}}])|_h: X_h \rightarrow X_h$ と $P_h(I - A^{-1} D_v N_2[\hat{\mathbf{z}}])|_h: X_h \rightarrow X_h$ は可逆であり, それぞれ次を満たすとする:

$$\|(P_h(I - A^{-1} D_u N_1[\hat{\mathbf{z}}])|_h)^{-1}\| \leq \tau_1,$$

$$\|(P_h(I - A^{-1} D_v N_2[\hat{\mathbf{z}}])|_h)^{-1}\| \leq \tau_2.$$

また,

$$\kappa_1 := C_h(K_5 \tau_1 K_1 + K_6)$$

$$\kappa_2 := C_h(K_8 \tau_2 K_3 + K_9)$$

とする. さらに,

$$R_1 :=$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \tau_1 \left(1 + \frac{C_h K_1 \tau_1 K_5}{1 - \kappa_1} \right) & \frac{\tau_1 K_1}{1 - \kappa_1} \\ \frac{C_h K_5 \tau_1}{1 - \kappa_1} & 1 \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$R_2 := \left\| \begin{pmatrix} \tau_1 \left(\frac{C_h K_1 (K_5 \tau_1 K_2 + K_7)}{1 - \kappa_1} + K_2 \right) & \\ \frac{C_h (K_5 \tau_1 K_2 + K_7)}{1 - \kappa_1} & \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$R_3 :=$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \tau_2 \left(1 + \frac{C_h K_3 \tau_2 K_8}{1 - \kappa_2} \right) & \frac{\tau_2 K_3}{1 - \kappa_2} \\ \frac{C_h K_8 \tau_2}{1 - \kappa_2} & 1 \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$R_4 := \left\| \begin{pmatrix} \tau_2 \left(\frac{C_h K_3 (K_8 \tau_2 K_4 + K_{10})}{1 - \kappa_2} + K_4 \right) & \\ \frac{C_h (K_8 \tau_2 K_4 + K_{10})}{1 - \kappa_2} & \end{pmatrix} \right\|_2$$

とする. もし, $\kappa_1 < 1, \kappa_2 < 1, R_2 R_4 < 1$ のすべてを満たすなら, $\mathbf{F}'[\hat{\mathbf{z}}]$ は可逆であり,

$$C_1 :=$$

$$\frac{1}{1 - R_2 R_4} \left\| \begin{pmatrix} R_1 & R_2 R_3 \\ R_1 R_4 & R_3 \end{pmatrix} \right\|_2$$

を満たす.

この定理 2 を利用することで, 線形化逆作用素のノルム評価ができる.

<参考文献>

- [1] Kouta Sekine, Akitoshi Takayasu and Shin'ichi Oishi "A verified computation of steady-state solutions to Reaction-Diffusion equations, Japan Society for Simulation Technology (JSST2013).
- [2] 関根晃太, 高安亮紀, 大石進一, " 反応拡散方程式の定常解に対する精度保証付き数値計算", 2013 年日本応用数学会年会.