

BCCモデルの入出力指向効率値比の等高線・幾何学

日大生産工

○篠原 正明

情報システム研究所

富山 広也

1. はじめに

文献 [1] において、多入出力BCCモデルの入力指向効率値IE、出力指向効率値OEの幾何学的解釈を行ったが、本論文ではOE/IEで定義される、両者の比「入出力指向効率値比P」の等高線を考察し、BCCモデルの生産可能集合(PPS)のどのような領域で入力指向あるいは出力指向の経営効率改善活動が効果的かを考察する。

2. CCRモデル、BCCモデルの単純例

CCRモデル、BCCモデルの単純例を通して、IE, OE, Pの概略特性を検討する。

「例2. 1」1入力1出力CCRモデル

最良生産活動(mp, most productive)点の一つを (x_{mp}, y_{mp}) とする。注目するDMUの座標を (x, y) とすると(図1)、そのIE, OE, Pは(1)～(3)で与えられる。

$$IE = \frac{a}{a+b} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x_0}{y_0} \quad (1)$$

$$OE = \frac{c}{c+d} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x_0}{y_0} \quad (2)$$

$$P = OE/IE = 1 \quad (3)$$

すなわち、(任意のDMUについて) $IE = OE$ で、 $P = 1$ である。

図2にIE, OEの等値線(等高線)の概略を示す。CCRモデルでは、入力が増加し、出力が減少すればするほど(図2で右下方方向)、効率値はIEとOE共に減少する。(例2. 1終り)

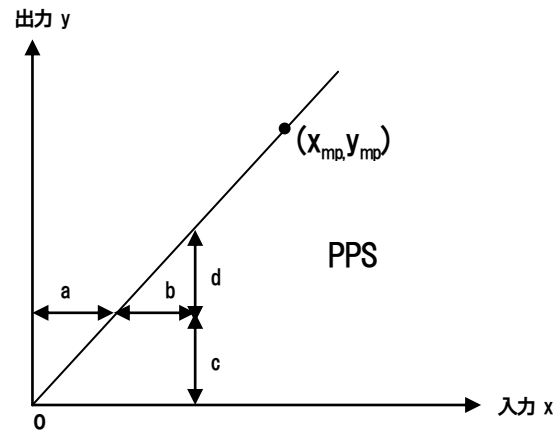


図1：1入力1出力CCRモデルの例

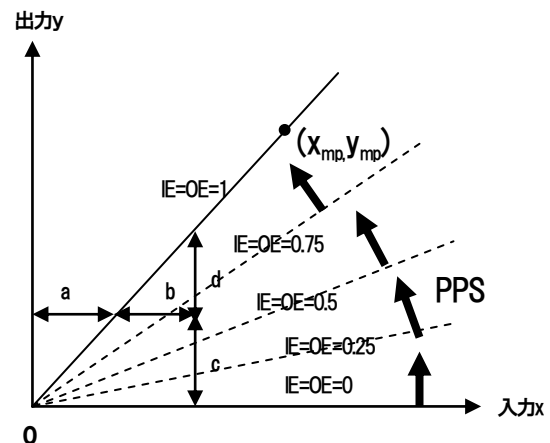


図2：1入力1出力CCRモデルのIE, OE特性 (矢印←は効率値増加方向)

「例2. 2」矩形PPSを持つ1入力1出力BCCモデルの例

矩形PPSの頂点一つにmp点を持つBCCモデルにおいて(図3)、そのIE, OE, Pは(4)～(6)で与えられる。

$$P = OE / IE = \frac{xy}{x_{mp}y_{mp}} \quad (6)$$

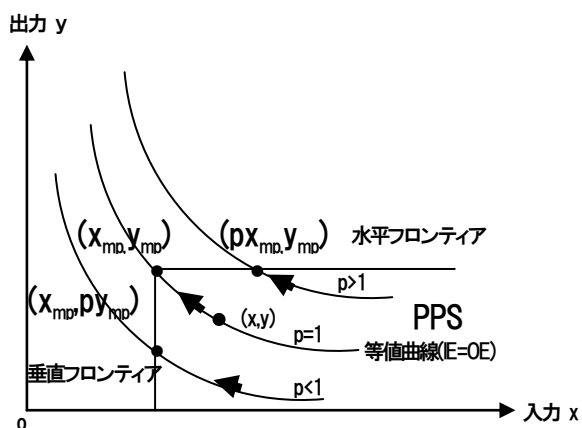


図3:矩形PPSを持つBCCモデルのP一定等高線(矢印←は効率値増加方向)

$P = p$ (一定値) と固定すると、 $P = p$ 一定等高線は直角双曲線 (7) となる。

$$xy = px_{mp}y_{mp} \quad (7)$$

PPSが一般的な場合には、 $p = 1$ の「 $I E = O E$ 」等値曲線は区分的直角双曲線であり [2]、本例はその最単純ケースと位置づけられる。

なお (7) は $p = 1$ で m 点 (x_{mp}, y_{mp}) を通過し、

$p > 1$ で水平フロンティアを、 $p < 1$ で垂直フロンティアを横切る。
(例2. 2終り)

「例2. 3」原点とmp点を結ぶ直線をフロンティアとして持つ1入力1出力BCCモデル

例2.2の規模の収穫減少型（DRS）モデル、すなわち、原点（ $x=0$ 、 $y=0$ ）DMUを仮定した特別な場合を考えよう（図4）。

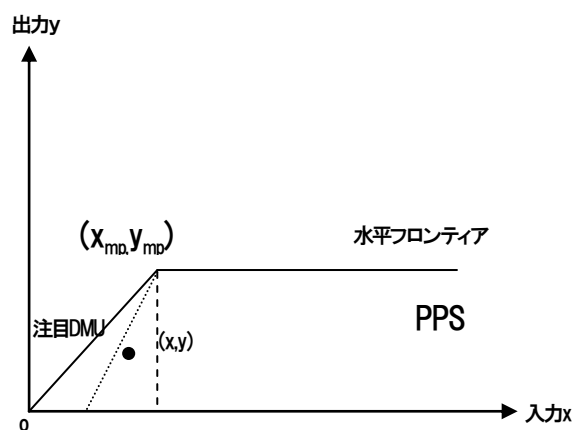


図4：DRS型凸包モデルのPPS

m p 点と原点 0 を結ぶ直線の下側の三角領域内の注目 DMU の座標を (x、y) とすると、この三角領域では例 2. 1 の CCR モデルと同様に $IE = OE$ が成立する。すなわち、三角領域では常に $P = 1$ が成立する。

一般には、 m_p 点から入力減少方向のフロンティアの傾斜は、この場合の傾斜より急となり（図中点線で表示）、三角形の内部（フロンティアより右下側）では、入力指向の改善が有利となり（ $I E$ 増加）、 $P = O E / I E$ は減少する。

フロンティア上では $P=1$ 、又、 $P=1$ の直角双曲等値曲線は m_p 点を図4では右下方向に通過するので、一般のBCCモデルでは、 m_p 点から出力を減少する方向のPPS下側領域では、 P 値が1以下に減少する渓谷地帯が生成される。

同様の議論により、一般のBCCモデルでは、m
p点より入力が増加する方向では、図4中の水平
フロンティアより上方向にフロンティア面が存
在し、そのフロンティアと水平面の間の領域には
P値が1以上となる尾根地帯が生成される。

(例2. 3終り)

3. 1入力1出力BCCモデルの数値例

表1の9DMU 1入力1出力データに対して、BCCモデルにもとづき入指向効率値Pを計算し、 $P=0$ からステップ幅0.2で $P=4.4$ までの等高線を図5に描写した。例2.3での予想通り、mp点から入力減少方向にP値が1低い渓谷状地帯が観察できる。

表1：1入力1出力データ例（3節の数値例）

NO.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I
(I)x	2	3	5	8	12	6	4	10	15
(O)y	8	16	20	24	27	15	8	18	21

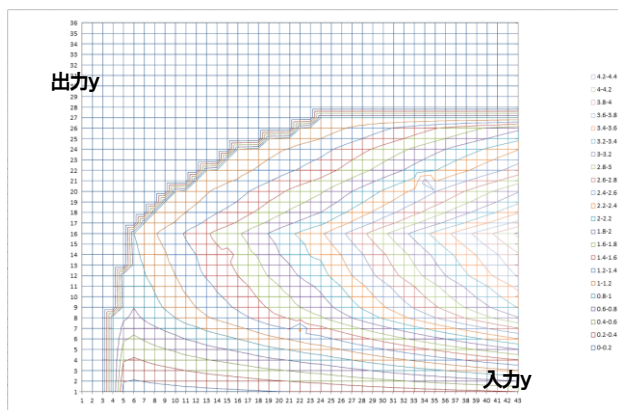


図5：BCCモデルの入出力指向効率値比Pの等高線

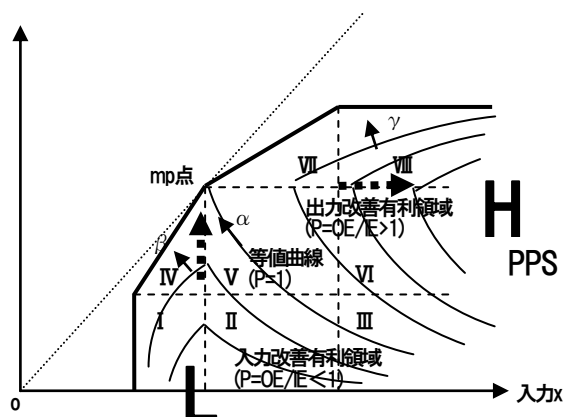


図6：BCCモデルの入出力指向効率値比・等高線の概略図

4. 考察

CCRモデルでは入力指向効率値と出力指向効率値が常に等しいが、BCCモデルでは必ずしもその関係は成立しない。金成修士論文[2]においては、BCCモデルで入力指向効率値と出力指向効率値が等しくなる領域を等値曲線(Equality Holding Boundary Curve)と呼び、それが区分的な直角双曲線の曲線と区分線形の前ティア面から構成されることを示した。図6において、等値曲線は原点を通る直線が接する点(最良生産活動(mp)点あるいは領域)から3方向に分岐しており、その内の2方向は前ティア曲線で、残る一つが生産可能集合の内部へと伸びた区分的直角双曲線である。従って、この直角双曲・等値曲線より右上領域は入力指向効率値<出力指向効率値であり、出力指向にもとづく改善が、一方、この直角双曲・等値曲線より左下領域は入力指向効率値>出力指向効率値であり、入力指向にもとづく改善が効果的であると考えられる。なお、入力指向効率値ならびに出力指向効率値、いずれの効率値も直線上(ユークリッド距離)の比率として効率値を考えているので、入出力データ値が経営効率改善活動の努力程度と比例しない場合は、経営効率改善活動の努力度合を表すデータ変換が必要となる(これは、広い意味で文献[3、4]のテーマである)。

図5あるいは概略図6によると、最も入出力指向効率値比が高くなる領域はmp点から入力を増加した方向のH(high)であり、逆に、最も入出力指向効率値比が低くなる領域はmp点から出力を減少した方向のL(low)である(図6参照)。図6に示した垂直方向の上向き点線矢印は、Lから谷底に沿って入出力指向効率値比がmp点まで増加する方向を示し、mp点からは尾根つたいに入出力指向効率値比が右向きの点線矢印に沿ってHの方向へ増加する様子が観察できる。

図6中の矢印 α 、 β 、 γ は各々領域でのI E、O E効率改善の方向を説明したものだが、領域Vでは矢印 α の様に等高線に沿った方向、一方、領域I V、V I Iでは矢印 β 、 γ の様に等高線に垂直方向となる。すなわち、前者では入出指向効率値比Pを保持したままの改善が、一方、後者では、Pを変化させた改善が効果的であることを示唆する。

領域I Vなどの渓谷地帯では入力減少による発展登上フロンティアへの改善、領域V I Iなどの尾根地帯では出力増加による、飽和フロンティアへの改善、など特徴的な改善策の領域が存在することがわかる。

5. おわりに

BCCモデルにおける入出指向効率値比Pの等高線の幾何形状を考察し、mp点を基準に入力減少方向に渓谷地帯、出力増加方向に尾根地帯が存在する、こと等を説明した。このような等高線の幾何形状を考慮して、どのような改善軌跡

(trajectory)をとるべきか(例えば、領域I I、I I I、V、V Iよりmp点を目標にするならば、最初は等高線に沿って改善し、渓谷か尾根に到達後は、渓谷沿いあるいは尾根沿いにmp点に移動する)、等については今後の課題である。さらに、多入出力BCCモデルの生産可能集合(P P S)における考察も今後の課題である。

参考文献

- [1] 篠原正明、富山広也：BCCモデルの入力・出力指向効率値の幾何学、平成24年度日本大学生産工学部第45回学術講演会講演論文集(2012. 12)．
- [2] 金成賢作：AHPとDEAに関する研究、日本大学生産工学研究科平成22年度修士論文 (2011. 3)
- [3] 篠原正明、篠原健：データ変換をともなうDEA(その1, 2, 5)、平成24年度日本大学生産工学部第45回学術講演会講演論文集(2012. 12)．
- [4] 篠原正明、富山広也：データ変換をともなうDEA(その3, 4)、平成24年度日本大学生産工学部第45回学術講演会講演論文集(2012. 12)．
- [5] 富山広也：DEAの幾何学、日本大学生産工学研究科平成23年度修士論文 (2012. 3)