ISSN 2186-5647

－日本大学生産工学部第45回学術講演会講演概要（2012-12-1）－

2-80

BCCモデルの入力・出力指向効率値の幾何学

日大生産工　○篠原　正明　　情報システム研究所　富山　広也

1.　はじめに

フロンティア包絡面が区分線形で規模の収穫可変性を持つBCCモデルにおいて、出力を一定に保持し多入力を等比削減する視点からの入力指向効率値IEと入力を一定に保持し多出力を等比増加する視点からの出力指向効率値OEが効率性尺度として広く採用されている。規模の収穫一定モデルのCCRモデルでは、常に「IE＝OE」であるが、BCCモデルでは、一般に「IE≠OE」である。本論文では、(i)入力／出力混合指向モデル、(ii)入力・出力指向効率値の幾何学、の２つの視点より考察を行った。

2.　BCCモデルの入力／出力指向効率値の図解

１入力１出力BCCモデルのフロンティアを図示した図１に基づき、幾何学的に入力指向効率値IEと出力指向効率値OEを説明する(図１でA～Hは点、a～fは線分長)。

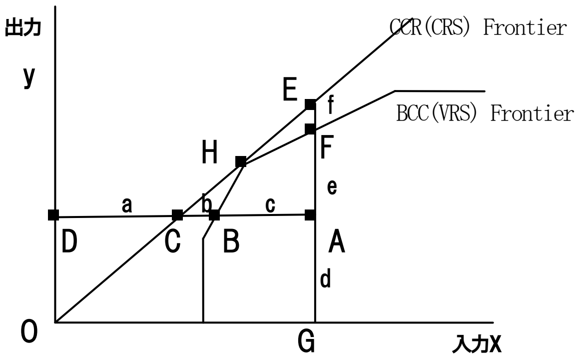

図１：１入力１出力BCCモデルのフロンティア例

DMU A(点A)について、(1)～(5)が成立する。

入力指向(技術)効率値 $IE=\frac{a+b}{a+b+c}$ (1)

出力指向(技術)効率値 $OE=\frac{d}{d+e}$ (2)

CCR効率値 $CE=\frac{a}{a+b+c}=\frac{d}{d+e+f}$ (3)

入力指向規模効率値 $ISE=CE/IE=\frac{a}{a+b}$ (4)

出力指向規模効率値 $OSE=CE/OE=\frac{d+e}{d+e+f}$ (5)

さらに、変形規模効率値MISE,MOSEを(6)、(7)で定義する。

変形入力指向規模効率値 $MISE=\frac{c}{b+c}$ (6)

変形出力指向規模効率値 $MOSE=\frac{e}{e+f}$ (7)

すると、(8)、(9)の関係式が成立する。

$MISE=\frac{1-IE}{1-CE}$ (8)　　$MOSE=\frac{1-OSE}{1-CE}$ (9)

なお、多入力多出力モデルでは図１の様な図解が難しいが、多入力削減方向を入力軸、多出力増加方向を出力軸として考えればよい。

3.　BCCモデルにおける入力/出力混合指向効率値

２節では、水平方向に入力削減する視点と垂直方向に出力増加する視点の２つの経営改善の立場にもとづき、効率性尺度IEとOEを図解した。

3.1　入力/出力混合指向方向の効率値

図２に示すように、点Aより入力を削減すること同時に出力を増加する(斜め左上の)破線表示の方向に沿っての経営改善も考えられる。この場合は、入力指向の延長上にある混合指向効率ME(I)と出力指向の延長上にある混合指向効率ME(O)が定義できるが、両者は一般には等しくない。

$ME(I)=\frac{g+h}{g+h+i}$ (10)　$ME(O)=\frac{k}{j+k}$ (11)

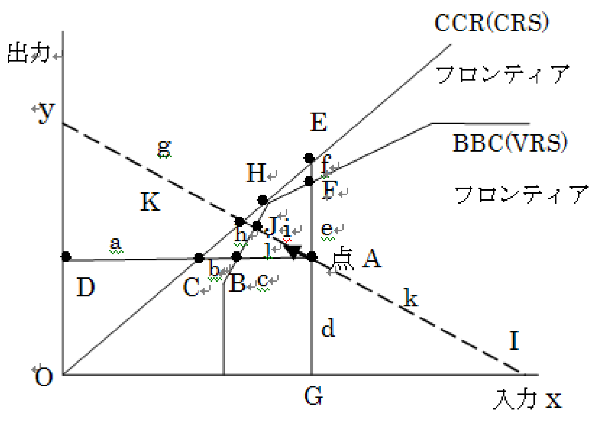

図２：混合指向方向(破線上の矢印)での改善(但し、i=j)

Geometry of Input- and Output-oriented Efficiency for BCC Model

Masaaki SHINOHARA and Hiroya TOMIYAMA

3.2　様々な入力/出力混合指向の面的効率性指標

図３において注目する出力指向(垂直方向)のフロンティア上の射影点をF、入力指向(水平方向)のフロンティア上の射影点をB、等とする時、長方形NFGOとその点Bを基準とした長方形NMBD、MFAB、DBPO、BAGPへの４分割を考えよう。

①長方形MFAB(面積α)はDMU Aから見て、より少ない入力でより大きな出力を産出する優れた領域に対応している(正確には、フロンティア内の生産可能集合の四角形HFABと言うべきであろう)。よって、この面積が大きい程、DMU Aの非効率性も大きい。

②長方形BAGP(面積β)はすべて生産可能集合で、DMU Aから見て、より少ない入力でより少ない出力を産出する同レベルの領域に対応している。

③長方形NMBD(面積γ)はDMU Aから見て、大幅により少ない入力でより多きい出力を産出する超優れた領域ではあるが、考察対象の生産可能集合には全く含まれていない。

④長方形DBPO(面積δ)はDMU Aから見て、大幅により少ない入力でより少ない出力を産出する比較的優れた領域ではあるが、その一部が考察対象の生産可能集合に含まれているだけである。

４つの長方形の面積α、β、γ、δは(12)～(15)で与えられるので、2節の(1)、(2)のIE、OEの様々な積の間に(17)～(20)の関係式が成立する。

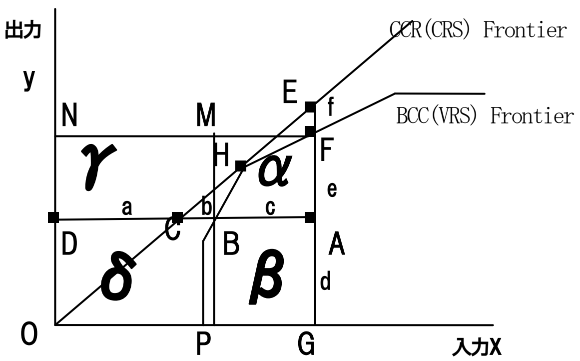

図３：１入力１出力BCCモデルの長方形領域

$\alpha=ce$ (12)　$\beta=cd$ (13)　$\gamma=(a+b)e$ (14)　$\delta=(a+b)d$ (15)

長方形NFGOの面積$S=\alpha+\beta+\gamma+\delta=(a+b+c)(d+e)$ (16)

$$\mathrm{IE}\cdot\mathrm{OE}=\frac{\delta}{S} \quad (17) \qquad (1-\mathrm{IE})\cdot\mathrm{OE}=\frac{\beta}{S} \quad (18)$$

$$\mathrm{IE}\cdot(1-\mathrm{OE})=\frac{\gamma}{S} \quad (19) \qquad (1-\mathrm{IE})\cdot(1-\mathrm{OE})=\frac{\alpha}{S} \quad (20)$$

［参考］
$$\mathrm{OE}/\mathrm{IE}=\frac{\beta+\delta}{\gamma+\delta} \quad (21) \qquad \mathrm{OE}/(1-\mathrm{IE})=\frac{\beta+\delta}{\alpha+\beta} \quad (22)$$

$$(1-\mathrm{OE})/\mathrm{IE}=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta} \quad (23) \qquad (1-\mathrm{OE})/(1-\mathrm{IE})=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\beta} \quad (24)$$

$$\mathrm{IE}/(1-\mathrm{IE})=\frac{a+b}{c} \quad (25) \qquad \mathrm{OE}/(1-\mathrm{OE})=\frac{d}{e} \quad (26)$$

(12)～(20)より、入力指向効率値IE,出力指向効率値OEと図3の4つの長方形(面積)以下の点が判明した。

【1】(17)より、IEとOEの積は大きな長方形NFGO(面積S)の中で小さな長方形DBPO(面積δ)の占める割合に対応する。

【2】(20)より、非効率指標同士の積(1-IE)(1-OE)は、大長方形の中で小長方形MFAB(面積α)の占める割合であり、小長方形MFAB(面積α)はDMU Aから見て優れもの領域なので、DMU Aがフロンティアからかい離すればするほど、非効率となりかつ面積Sも増加すると解釈できる。

【3】(20)の解釈は直接的かつ直観的であり、理解容易であるが、(17)の解釈は直観的でないため、理解が難しいと思われるが、以下のように【2】を経由すれば解釈できる。

「大長方形NFOGは入力と出力の効率性改善を考える際の可動範囲と考えると、DMU Aがフロンティアに近い所にあると(効率性上昇)、小長方形MFAB(面積α)が小さくなり、その対局に位置する小長方形DBPO(面積δ)の占める割合が相対的に増加する。」

［例3.1］表3.1の1入力1出力データに対するBCCモデルの生産可能集合を図4に示す(但し、営業人数が入力、売上高が出力)。

表3.1　　1入力1出力データ(例3.1)

営業所	A	B	C	D	E	F	G	H
営業人数	2	3	3	4	5	5	6	8
売上高	1	3	2	3	4	2	3	5
売上高/人	0.5	1	0.667	0.075	0.8	0.4	0.5	0.625

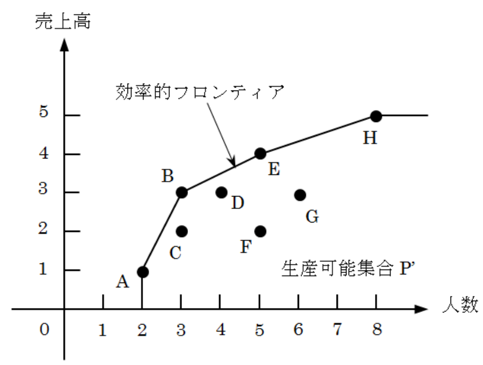

図4：表3.1のデータに対するBCCモデルの生産可能集合

以下にDMU CとDMU Fについて、DEA Solver[1]を用いて計算したIE, OE, ならびに射影点(projection)の情報(表3.2)にもとづき、(12)～(26)の関係式を用いて、図3の長方形領域の辺長c, d, e, a+b、面積α, β, γ, δS等を評価すると以下の通りである。

［DMU C］ IE = 0.8333, c = 0.5, OE = 0.6667, e = 1, 従って、a+b = 1 , d=5 , α=0.5 , β=2.5 , γ=1 , δ=5 , S=9.

［DMU F］ IE = 0.5, c = 2.5, OE = 0.5, e = 2, 従って、a+b = 2.5 , d = 2 , α=5 , β=5 , γ=5 , δ=5 , S=20.

表3.2(BCC-I) 例3.1のDEA SolverのProjectionの結果

DMU I/O	Score Data	Projection	Difference	%
C	0.8333333			
x	3	2.5	-0.5	-16.67%
y	2	2	0	0.00%
F	0.5			
x	5	2.5	-2.5	-50.00%
y	2	2	0	0.00%

表3.2(BCC-O) 例3.1のDEA SolverのProjectionの結果

DMU I/O	Score Data	Projection	Difference	%
C	0.666667			
x	3	3	0	0.00%
y	2	3	1	50.00%
F	0.5			
x	5	5	0	0.00%
y	2	4	2	100.00%

［例3.2］ 2つの入力データx_1, x_2は表3.1の1入力(営業人数)データxと全く同じデータを採用した2入力1出力データのBCCモデルのDMU Fについて、DEA Solver[1] を用いて計算したIE, OE, ならびに射影点(projection)の情報(表3.3, BCC-Oの結果は省略)にもとづき、(12)～(26)の関係式を用いて、図3の長方形領域の辺長c, d, e, a+b、面積α, β, γ, S等を評価すると以下の通りである。

［DMU F］ IE = 0.5, $c=5/\sqrt{2}$ ÷ 3.536, OE = 0.5, e = 2, 従って、$a+b = 5/\sqrt{2}$, d = 2 , $\alpha=5/\sqrt{2}$, $\beta=5/\sqrt{2}$, $\gamma=5/\sqrt{2}$, $\delta=5/\sqrt{2}$, $S=20/\sqrt{2}$ 但し、表3.3より、DMU F(x_1=5, x_2=5)のBCC－Iでの射影点はx_1(projection)=2.5, x_2(projection)=2.5なので、(27)よりcを計算した。

$$c = ((x_1-x_1(\mathrm{projection}))^2+(x_2-x_2(\mathrm{projection}))^2)^{1/2} \quad (27)$$

表3.3(BCC-I) 例3.2のDEA SolverのProjection結果

DMU I/O	Score Data	Projection	Difference	%
C	0.8333333			
x1	3	2.5	-0.5	-16.67%
x2	3	2.5	-0.5	-16.67%
y	2	2	0	0.00%
F	0.5			
x1	5	2.5	-2.5	-50.00%
x2	5	2.5	-2.5	-50.00%
y	2	2	0	0.00%

［例3.3］ 表3.4の2入力1出力データのBCCモデルのDMU Fについて、DEA Solver[1]を用いて計算したIE, OE, ならびに射影点(projection)の情報にもとづき、(12)～(26)の関係式を用いて、図3の長方形領域の辺長c, d, e, a+b、面積α, β, γ, S等を評価すると以下の通りである。

表3.4 2入力1出力データ(例3.3)

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H
(I)x1	2	3	3	4	5	5	6	8
(I)x2	2	3	3	4	5	***4***	6	8
(O)y	1	3	2	3	4	2	3	5

但し、表3.4の2つの入力データx_1, x_2は例3.2の入力データとDMU Fのみが異なり、他は同じである。例3.2ではDMU F(x_1=5, x_2=5)であるが、例3.3ではDMU F(x_1=5, x_2=4)である。

［DMU F］ IE = 5/8 = 0.625, $c = \sqrt{17/2}$ ÷ 2.915, OE = 4/7 ÷ 0.5714, e = 1.5, 従って、$a+b = 5\sqrt{17}/3\sqrt{2}$, d = 2 , $\alpha=5\sqrt{17}/2\sqrt{2}$, $\beta=5\sqrt{17}/2\sqrt{2}$, $\delta=5\sqrt{17}/3\sqrt{2}$, $S=28\sqrt{17}/3\sqrt{2}$≑27.211. 但し、表3.5より、DMU F(x_1=5, x_2=4)のBCC-Iでの射影点はx_1(projection)=2.5, x_2(projection)=2.5なので、(27)よりcを計算した。

なお、例3.1から例3.3について、(17)～(20)の入力/出力混合指標と面積比率の関係式の成立が確認できる。

また、本例の入力指向BCC-Iモデルでは、出力値(DMU Fではy=2)を保持したままで、2つの入力(x_1, x_2)を射影点

$(x_1(\mathrm{projection}), x_2(\mathrm{projection}))$へ直線的に減少するため、図1(あるいは図2、図3)において、入力xのかわりに2入力(x_1, x_2)を考慮する必要がある。DMU Fについて、「y=2」一定平面での入力(x_1, x_2)削減方向と図1における基準点D、線分長a+bとcがどのように対応するかを図５に示す。図1〜図3における入力削減時の基準点Dは、図５では(x_1, x_2)平面の原点でも、(x_1, x_2)平面の第１象限の境界上の点でもなく、最遠のx軸接辺(本例では、x_1軸接辺)となることがわかる、すなわち、基準点Dでは一部の入力(本例では、入力x_1)が負値をとるまで削減している状況を想定している。

表3.5(BCC-I)　例3.3のDEA SolverのProjection結果

DMU I/O	Score Data	Projection	Difference	%
3	0.8333333			
x1	3	2.5	-0.5	-16.67%
x2	3	2.5	-0.5	-16.67%
y	2	2	0	0.00%
6	0.625			
x1	5	2.5	-2.5	-50.00%
x2	4	2.5	-1.5	-37.50%
y	2	2	0	0.00%

表3.5(BCC-O)　例3.3のDEA SolverのProjection結果

DMU I/O	Score Data	Projection	Difference	%
3	0.6666667			
x1	3	3	0	0.00%
x2	3	3	0	0.00%
y	2	3	1	50.00%
6	0.5714286			
x1	5	4	-1	-20.00%
x2	4	4	0	0.00%
y	2	3.5	1.5	75.00%

4.　おわりに

BCCモデルの入力指向ならびに出力指向の効率値は幾何学的には、図1〜図3に示す1入力1出力モデルにおいて水平方向、垂直方向の適切なユークリッド距離比として解釈されてきた。しかしながら、1入力1出力モデルの幾何学的解釈は必ずしも多入出力BCCモデルの入力・出力指向効率値の解釈には直接適用できないので、本論文では、様々な入力/出力混合指向の面的効率性指標の導入にもとづき、多入出力BCCモデルの入力・出力指向効率値の幾何学的な解釈を行った(例3.3と図5)。すなわち、(図1〜図3において)入力削減時の基準点Dは、注目DMUとその水平方向射影点で定まる入力削減方向の延伸上ですべての入力値が非正$(x_D \leqq 0)$となる点であり、同様に出力削減時の基準点Gは、注目DMUとその垂直方向射影点で定まる出力削減方向の延伸上ですべての出力値が非正$(y_G \leqq 0)$となる点となる。

参考文献

［1］William Wager Cooper, Lawrence M. Seiford, Kaoru Tone: Data Envelopment Analysis, Springer, 2000

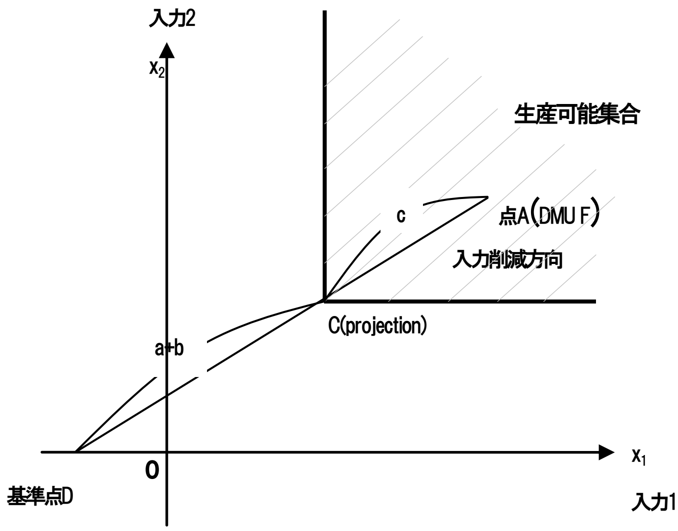

図5:出力y=2一定平面上でのDMU　Fの入力削減方向とその基準点(DMU Fの点Aは$(x_1=5,\ x_2=4)$,射影点Cは$(x_1=2.5,\ x_2=2.5)$,基準点Dは$(x_1=-1.5,\ x_2=0)$)