

MAX-DAPあるいはMIN-DAPの周期性の理論分析

日大生産工

○篠原 正明

情報システム研究所

篠原 健

1. はじめに

DAPの項目*i*の評価ウェイト更新において*n*個の暫定評価ウェイト $a_{ij}x_j(t)$ ($j=1, \dots, n$)の算術平均 (1) のかわりに最大値 (MAX-DAP, (2)) あるいは最小値 (MIN-DAP, (3)) 等の代表値演算を採用すると、不整合時において算術平均採用時には正規化ウェイトベクトルは時間経過と共に収束するが、MAX-DAP, MIN-DAPでは周期 2, 3, ... の振動が観察され、正規化ウェイトベクトルは1つのベクトルに収束しない場合が存在する。

$$\text{算術平均DAP: } x_j(t+1) = \frac{1}{n} (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t)) \quad (1)$$

$$\text{MAX-DAP: } x_i(t+1) = \max_{j=1, \dots, n} \{a_{ij}x_j(t)\} \quad (2)$$

$$\text{MIN-DAP: } x_i(t+1) = \min_{j=1, \dots, n} \{a_{ij}x_j(t)\} \quad (3)$$

算術平均DAP (1) においては、様々な視点からの暫定評価ウェイト $a_{ij}x_j(t)$ ($j=1, \dots, n$) の「和して平均をとる」という、ある意味で日本的な和を重んじる操作を採用することにより 1 つの妥協案あるいは妥協案ウェイトへと収束する。固有ベクトルにもとづくウェイトとは、このように妥協的色彩が濃い (ある意味で日本的な「たして2で割る」タイプの意思決定であることに注意を要する。

It is important to notice that the eigenvector-based priority weight vector used in AHP, gives a result of Japanese way of decision making, where a harmony among different opinions is considered important and two opinions are summed up and then made into one by dividing it by two.

2章において「MAX-DAPの一対比較行列*A*の逆比性違反」では周期 2 の振動が発生する場合があります、3章において「MAX-DAPの逆比性保持で最単純な整合性違反」では周期 3 の振動が必ず発生することを理論検討する。4章に

おいて、2, 3章の理論検討の結果を一般化する。

2. 逆比性違反のMAX-DAP

一対比較行列*A*が一対の対称対 (a pair of symmetric pairs, 例えば, (1, 2) と (2, 1), を除けば逆比性と三角整合性 (Δ -consistency) を保持しているMAX-DAPの一般論を検討する。

ここで、三角整合性(あるいは3点整合性)とは任意の (*i, j, k*) について、「 $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ (4)」が成立することであり、この意味で逆比性とは対整合性 (pair-consistency) あるいは2点整合性と言える ((4) において、 $k=i, a_{ii}=1$)。

最初に、項目数*n*=2の場合の比較行列 A_2 のMAX-DAPを検討し、その後4節で A_2 を一部に含むそれ以外は整合的な項目数*n*>2のMAX-DAPを検討する。

2×2の整合的(すなわち、逆比性を持つ)比較行列 A_2 は一般的に(4)で表現できる(但し、 $a>0, b>0$)。整合的でない(すなわち、逆比性を持たない)場合には(5)で表現できる($c>0$)。初期ウェイトベクトル*x*(0)を(6)で与えると、*x*(1)は(7)となる。

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a/b \\ b/a & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & c/b \\ b/a & 1 \end{pmatrix} \quad (5) \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$x(1) = A_2 \odot x(0) = \begin{pmatrix} \max(1, c/b) \\ \max(\frac{b}{a}, 1) \end{pmatrix} \quad (7)$$

[その1] $c \leq b, b \leq a$ (すなわち、 $c \leq b \leq a$)

$$x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8) \quad \boxed{\text{収束}}$$

[その2] $c \leq b, b \geq a$

$$x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ b/a \end{pmatrix}, \quad x(2) = \begin{pmatrix} \max(1, \frac{c}{a}) \\ b/a \end{pmatrix} \quad (9)$$

Theoretical Analysis of the Periodicity observed in MAX-DAP and MIN-DAP

Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

[その2 (i)] $c \geq a$ (すなわち $a \leq c \leq b$)

$$x(2) = \begin{pmatrix} c/a \\ b/a \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \quad (10) \quad x(3) = \frac{c}{a} \begin{pmatrix} 1 \\ b/a \end{pmatrix} \quad (11)$$

(11)の $x(3)$ は(9)の $x(1)$ の定数倍($c/a \geq 1$)である。

周期2で振動

[その2 (ii)] $c \leq a$ (すなわち $b \leq c \leq a$)

$$x(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ b/a \end{pmatrix} \quad (12) \quad \boxed{\text{収束}}$$

[その3] $c \geq b, b \leq a$

$$x(1) = \begin{pmatrix} c/b \\ 1 \end{pmatrix}, x(2) = \begin{pmatrix} c/b \\ \max(\frac{c}{a}, 1) \end{pmatrix} \quad (13)$$

[その3 (i)] $c \leq a$ (すなわち $b \leq c \leq a$)

$$x(2) = \begin{pmatrix} c/b \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14) \quad \boxed{\text{収束}}$$

[その3 (ii)] $c \geq a$ (すなわち $b \leq a \leq c$)

$$x(2) = \begin{pmatrix} c/b \\ c/a \end{pmatrix} = \frac{c}{a} \begin{pmatrix} a/b \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15) \quad x(3) = \frac{c}{a} \begin{pmatrix} c/b \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

(16)の $x(3)$ は(13)の $x(1)$ の定数倍($c/a \geq 1$)である。

周期2で振動

[その4] $c \geq b, b \geq a$ (すなわち $a \leq b \leq c$)

$$x(1) = \begin{pmatrix} c/b \\ b/a \end{pmatrix}, x(2) = \begin{pmatrix} c/a \\ c/a \end{pmatrix}, x(3) = \frac{c}{a} \begin{pmatrix} c/b \\ b/a \end{pmatrix} \quad (17)$$

(17)の $x(2)$ は(6)の $x(0)$ の定数倍($c/a \geq 1$)、(17)の $x(3)$ は $x(1)$ の定数倍($c/a \geq 1$)である。

周期2で振動

[その1][その2 (i), (ii)], [その3 (i), (ii)], [その4]の6通り ($3! = a, b, c$ の大小関係順列数)について、調べたが、 $a_{12}a_{21} = c/a \geq 1$ (18)の時に周期2で振動 (倍率 c/a) し、それ以外の時に収束する。但し、 $x(t)$ ($t=0, 1, 2, \dots$)は $\sum x_i(t)=1$ 等と正規化していない。

3. 最単純整合性違反のMAX-DAP

逆比性ならびに整合性が保持されている整合行列において、1要素のみが原因で整合性が満たされない場合について、MAX-DAPでは必ず周期3の振動が発生することを、 $n=3$ の比較行列について一般論を以下に展開する。

3×3 の整合的 (かつ逆比的) 比較行列 A_3 は一般的に(18)

で表現できる (但し、 $a > 0, b > 0, c > 0$)。逆比性は保持した下で整合性がない最単純例を(19)に示す ($a \neq d > 0$)。

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a/b & a/c \\ b/a & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix} \quad (18) \quad A_3' = \begin{pmatrix} 1 & d/b & a/c \\ b/d & 1 & b/c \\ c/a & c/b & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

(19)では(18)の(1, 2), (2, 1)要素の a を d で置換した。

初期ウェイトベクトル $x(0)$ を(20)で与えると、 $x(1)$ は(21)となる。

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20) \quad x(1) = A_3' \odot x(0) = \begin{pmatrix} \max(1, a/c, d/b) \\ \max(b/d, 1, b/c) \\ \max(c/a, c/b, 1) \end{pmatrix} \quad (21)$$

以下に、 a, b, c, d の大小関係で場合分けして、書く場合について $x(1), x(2), x(3)$ を具体的に評価して振動の有無を検証する。なお、整合行列(18)において、 a, b, c は項目1, 2, 3のウェイトに対応するが、以下では「 $a \geq b \geq c$ 」を仮定し、不整合行列(19)での $d (\neq a)$ の「 $a \geq b \geq c$ 」での位置関係で場合分けする (厳密には、他の5通りについても検証が必要)。

[その1] $d > a \geq b \geq c$

$$x(1) = \begin{pmatrix} \max(d/b, a/c) \\ b/c \\ 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

[その1 (i)] $\max(d/b, a/c) = a/c$ の時

$$x(1) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, x(2) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} d \\ b \\ c \end{pmatrix}, x(3) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} d \\ b \\ cd/a \end{pmatrix}, x(4) = \frac{d}{ac} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (23)$$

(23)の $x(4)$ は $x(1)$ の定数倍($d/a > 1$)。 **周期3で振動**

[その1 (ii)] $\max(d/b, a/c) = d/b$ の時

$$x(1) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} cd/b \\ b \\ c \end{pmatrix}, x(2) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} d \\ b \\ c^2 d/ab \end{pmatrix}, x(3) = \frac{1}{abc} \begin{pmatrix} abd \\ bcd \\ c^2 d \end{pmatrix}$$

$$x(4) = \frac{d}{ac} \begin{pmatrix} cd/b \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (24)$$

(24)の $x(4)$ は $x(1)$ の定数倍($d/a > 1$)。 **周期3で振動**

[その2] $a > d \geq b \geq c$

$$x(1) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, x(2) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a \\ ab/d \\ c \end{pmatrix}, x(3) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a \\ ab/d \\ ac/d \end{pmatrix}, x(4) = \frac{a}{cd} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (25)$$

(25)の $x(4)$ は $x(1)$ の定数倍($a/d > 1$)。 周期3で振動

[その3] $a \geq b \geq d \geq c$ (但し、 $a > d$)

$$x(1) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, x(2) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a \\ ab/d \\ c \end{pmatrix}, x(3) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a \\ ab/d \\ ac/d \end{pmatrix}, x(4) = \frac{a}{cd} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (26)$$

(26)の $x(4)$ は $x(1)$ の定数倍($a/d > 1$)。 周期3で振動

[その4] $a \geq b \geq c \geq d$ (但し、 $a > d$)

$$x(1) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, x(2) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a \\ ab/d \\ c \end{pmatrix}, x(3) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a \\ ab/d \\ ac/d \end{pmatrix}, x(4) = \frac{a}{cd} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (27)$$

(27)の $x(4)$ は $x(1)$ の定数倍($a/d > 1$)。 周期3で振動

「 $a \geq b \geq c$ 」の場合の[その1]～[その4]について、すべて周期3（1以上の定数倍）で発散振動し、収束する場合はない。

4、 A_2' ならびに A_3' を一部に含むMAX-DAPの考察

極小な逆比性違反の比較行列 A_2' のMAX-DAPを2章で、極小な整合性違反の比較行列 A_3' のMAX-DAPを3章で、その理論解析を行った。4章では、 A_2' あるいは A_3' を一部に含むより大きな（それ以外は整合的な）比較行列に対するMAX-DAPを考察する。なお、一般論を論ずると場合分け数が莫大となるので、紙面の制約上、その一部の組み合わせのみを以下で論じる。

4.1 A_2' を含む3×3行列 B_3'

$$B_3' = \begin{pmatrix} A_2' & (a, b)^T/w \\ w/(a, b) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c/b & a/w \\ b/a & 1 & b/w \\ w/a & w/b & 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

(28)の3×3行列において、左上2×2部分行列 A_2' は(5)と同じで、それ以外は整合的な比較行列を意図した。

すなわち、(28)において(1, 2), (2, 1)要素間でのみ逆比性が不成立で、それ以外の対称対要素間では、逆比性が成立している（しかし三角整合性は不成立）。

初期ウェイトベクトル $x(0) = (1, 1, 1)^T$ (29)

$$x(1) = B_3' \odot x(0) = \begin{pmatrix} \max(1, \frac{c}{b}, \frac{a}{w}) \\ \max(\frac{b}{a}, 1, \frac{b}{w}) \\ \max(\frac{w}{a}, \frac{w}{b}, 1) \end{pmatrix} \quad (30)$$

以下に場合分けの一部を示す。

[その1 (i)] $a \geq b \geq c$ かつ $w \geq a$ （すなわち、 $w \geq a \geq b \geq c$ ）

$$x(1) = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} b \\ b \\ w \end{pmatrix}, x(2) = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} a \\ b \\ w \end{pmatrix}, x(3) = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} a \\ b \\ w \end{pmatrix} \quad (31)$$

(31)の $x(2)$ と $x(3)$ が一致した。 収束

[その1 (ii)] $a \geq b \geq c$ かつ $w \leq c$ （すなわち、 $a \geq b \geq c \geq w$ ）

$$x(1) = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} a \\ b \\ w \end{pmatrix}, x(2) = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} a \\ b \\ w \end{pmatrix} \quad (32)$$

(32)の $x(1)$ と $x(2)$ が一致した。 収束

4.1節[その1 (i), (ii)] ((iii), (iv)は省略)は2章[その1]に対応しており、(8)に示すように2章でも4.1節と同じく収束しているが、収束ベクトル値が異なっている。これは、 A_3' では三角整合性が不成立なための影響と思われる。

4.2 A_3' を含む4×4行列 B_4'

$$B_4' = \begin{pmatrix} A_3' & (a, b, c)^T/w \\ w/(a, b, c) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d/b & a/c & a/w \\ b/d & 1 & b/c & b/w \\ c/a & c/b & 1 & c/w \\ w/a & w/b & w/c & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

(33)の4×4行列において、左上3×3部分行列 A_3' は(19)と同じで、それ以外は整合的な比較行列を意図した。逆比性はすべての対称対要素間で成立しており、(1, 2), (2, 1)要素に関する三角整合性のみが不成立である。初期ウェイトベクトル $x(0)$ を(34)で与えると、 $x(1)$ は(35)となる。

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$x(1) = B_4' \odot x(0) = \begin{pmatrix} \max(1, \frac{d}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{w}) \\ \max(\frac{b}{d}, 1, \frac{b}{c}, \frac{b}{w}) \\ \max(\frac{c}{a}, \frac{c}{b}, 1, \frac{c}{w}) \\ \max(\frac{w}{a}, \frac{w}{b}, \frac{w}{c}, 1) \end{pmatrix} \quad (35)$$

以下に場合分けの一部を示す

[その1] $w \geq d > a \geq b \geq c$

$$x(1) = \begin{pmatrix} \max\left(\frac{d}{b}, \frac{a}{c}\right) \\ b/c \\ 1 \\ w/c \end{pmatrix} \quad (36)$$

[その1 (i)] $\max(d/b, a/c) = a/c$ の時 ($cd/ab < 1$)

$$x(1) = \begin{pmatrix} a/c \\ b/c \\ 1 \\ w/c \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ w \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$x(2) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} d \\ b \\ c \\ w \end{pmatrix}, x(3) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} d \\ b \\ cd/a \\ wd/a \end{pmatrix}, x(4) = \frac{d}{ac} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ w \end{pmatrix} \quad (38)$$

(38) の $x(4)$ は (37) の $x(1)$ の定数倍 ($d/a > 1$)。 周期3で振動

[その1 (ii)] $\max(d/b, a/c) = d/b$ の時 ($cd/ab > 1$)

$$x(1) = \begin{pmatrix} d/b \\ b/c \\ 1 \\ w/c \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} cd/b \\ b \\ c \\ w \end{pmatrix}, x(2) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} d \\ b \\ c \times (cd/ab) \\ w \times (cd/ab) \end{pmatrix},$$

$$x(3) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} d \\ b \times (cd/ab) \\ c \times (d/a) \\ w \times (d/a) \end{pmatrix}, x(4) = \frac{d}{ac} \begin{pmatrix} cd/b \\ b \\ c \\ w \end{pmatrix} \quad (39)$$

(39) の $x(4)$ は $x(1)$ の定数倍 ($d/a > 1$)。 周期3で振動

4.2節[その1 (i), (ii)] は3章[その1 (i), (ii)]の場合に直接対応しており、両者ともに周期3で振動する。さらに、時変ベクトル値 $x(1), x(2), x(3), x(4) \dots$ の第3要素と第4要素は c と w 以外は同じ係数を取り、連動している。すなわち、 4×4 行列以上の比較行列でも、 A_2 以外が整合的ならば、3章での考察結果「1以上の定数倍周期3で振動」が成立することが予想できる。但し、 $x(t)$ ($t=0, 1, 2, \dots$) は $\sum x_i(t) = 1$ 等と正規化していない。

5. おわりに

比較行列が不整合時のMAX-DAPにおける周期的振動特性について理論分析をおこなった。2章、3章では、 A_2 ならびに A_3 という極小行列について考察し、周期的振動特性を確認した。さらに、4章では、 A_2 ならびに A_3 を

含む拡大行列の挙動を考察し、最単純な整合性違反の場合には3章の考察結果がそのまま拡大行列にも適用できることを4.2節で示した。なお、MIN-DAPの周期性については直接考察していないが、 $\arg \min \{a_i\} = \arg \max \{1/a_i\}$ あるいは $\arg \min \{a_i\} = \arg \max \{M - a_i\}$ 等の関係より、MAX-DAPでの考察結果が直接適用できると考える。

理論分析では、全ての場合分けや組み合わせについて検証をしていないので、残された部分の検証は今後の課題である。又、逆比性 (2点整合性) も一種の整合性であり (2章参照)、この観点から整合性の概念を見直し、再整理する必要があると思う。さらに、周期振動時に周期的に発生する3つの迷案ウェイトベクトル (周期3の場合) の意味付け等も今後の課題である。

As pointed out, the conventional eigenvector-based priority weight vector results in a Japanese way of decision making, or let us call it a harmonized opinion or policy.

What nuclear policy would Japan and Japanese people should take in the face of the 2011.3.11 East Japan earthquake and its aftermath? Cautiously thinking, we would reach following policy 1 or 2, a sort of extreme opinion.

Policy 1: Stop and abolish all the nuclear power facilities in Japan, considering the nuclear related risk, as Germany and Italy have been doing.

Policy 2: Establish the basic nuclear technology and the emergency deployment force, and increase the volume of nuclear power generation, considering the economical efficiency and the ecology, as France has been doing.

While these policies 1 and 2 are expected to be derived by the proposed MAX-DAP and/or MIN-DAP, the harmonized policy, Policy 3, by the conventional eigenvector method would be as follows, which seems to be taken by present Japanese government.

Policy 3: Decrease the volume of nuclear power generation for the time being and do not decide which policy to take, Policy 1 or Policy 2, waiting and seeing what is happening and will be happening.