

新しい整合性概念「m点整合性」の提案

日大生産工

○篠原 正明

情報システム研究所

篠原 健

1. はじめに

AHP等における完全情報・比率型一対比較行列Aの一対比較データ間の整合性(つじつまの有無)としては、「 $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$ for any different i, j, k (1)」が成立する時にAは整合行列、不成立時に不整合行列と言う。この既存の整合性(3点整合性)の定義を含みより一般的な整合性概念として、グラフ理論の有向閉路にもとづく「m点整合性」を提案する。

なお、不整合時に行列A全体としての整合性の程度を表す指標として、整合性指標CI(Consistency Index)が存在するが、本論文のテーマは、直接的にはこのCIに関するものではなく、「何をもって整合性が有るか無いか」のより基本的な「整合性概念」に関するテーマである。

2. 一対比較グラフにおける閉路(loop)と径路(path)

項目iを節点i、項目jを基準に項目iを評価する一対比較 (i, j) を有向枝 (i, j) 、一対比較値 a_{ij} を有向枝 (i, j) の重みとする一対比較グラフ $G(N, A)$ を考える(但し、節点集合 $N=\{i | i=1, \dots, n\}$ 、枝集合 $A=\{(i, j) | i, j=1, \dots, n\}$)。

既存のデータ間整合性「3点整合性」は、グラフ理論の閉路にもとづき、「任意の長さm(枝数)の単純有向閉路(三角形)において、有向閉路積(閉路に沿った一対比較値の積)が1 (2)。」の $m=3$ の特別な場合と考えられる。

又、グラフ理論の径路にもとづく多径路整合性…「任意の2点間(例えば、iとk)の有向径路の有向径路積は、径路に依存せず同じである。(3)。」の概念で径路数=2、径路長(枝数)=1と2とした特別な場合と考えることもできる。

以上の検討にもとづくと、一対比較グラフの閉路ならびに径路の概念を用いると既存の整合性(1)の概念が再整理かつ一般化できる(例えば、完全情報行列(完全グラフ)のみならず不完全情報(不完全グラフ)への適用、自己比較の同一性($a_{ii}=1$)、逆比性($a_{ij}a_{ji}=1$)などの統一的解釈、等)。それでは、閉路にもとづく整合性概念(2)と径路にもとづく整合性概念(3)では、どちらがより本質的であろうか?

本論文では、自己比較で同値性($m=1$)と逆比性($m=2$)の統一的解釈の立場から、閉路にもとづく整合性概念の一般化を試みる。

3. 一対比較グラフの閉路にもとづく整合性概念「m点整合性」

m点整合性(C_m : Consistency of degree m)ならびに単純閉路m点整合性(SC_m : Simple loop Consistency of degree m)を以下で定義する。

$C_m: G(N, A)$ における任意の長さmの有向閉路に沿っての一対比較値閉路積が1である。

なお、長さmの閉路とは、閉路を精成する節点列の大きさがm(重複を許す)の閉路のことである。

$SC_m: G(N, A)$ における任意の長さmの単純有向閉路に沿っての一対比較値閉路積が1である。

なお、長さmの単純閉路(simple loop)とは、閉路を構成する節点列の大きさがm(重複を許さない)の閉路のことである。

以上のように C_m と SC_m を定義すれば $G(N, A)$ が完全グラフ、不完全グラフにかかわらず、整合性概念を定義できる。

4. m点整合性 C_m と単純閉路m点整合性 SC_m の諸性質

[性質1] C_1 成立 $\leftrightarrow a_{ii}=1 (i=1, \dots, n)$ □

[性質2] SC_1 成立 $\leftrightarrow a_{ii}=1 (i=1, \dots, n)$ □

[性質3] C_1 成立 $\leftrightarrow SC_1$ 成立 □

C_1 (あるいは SC_1)は、 $G(N, A)$ において長さ1の(単純)閉路、すなわち、節点iの自己閉路(self-loop)の一対比較値 a_{ii} が1を意味する($i=1, \dots, n$)。

[性質4] C_2 成立 $\rightarrow$ 逆比性成立 □

[性質5] SC_2 成立 $\leftrightarrow$ 逆比性成立 □

[性質6] C_2 成立 $\rightarrow SC_2$ 成立 □

ここで、逆比性とは、「 $a_{ij}a_{ji}=1 (i \neq j)$, すなわち i, j重複を許さず」(4)であり、これは SC_2 の定義そのものである(性質5)。たとえ、逆比性(4)が成立しても、自己閉路が2回重複する長さ2の閉路($i \rightarrow i \rightarrow i$)を考えると、閉路積 $a_{ii}a_{ii} \neq 1$ の場合も考えられる(性質4)。すなわち、 SC_2 (=逆比性)は自己同値性

$(a_{ii}=1, SC_1, C_1)$ を必ずしも保証しない。

[性質7] C_2 成立 $\rightarrow$ C_1 成立(但し、 $a_{ii} \geq 0$) $\square$

C_2 成立ならば、2重自己閉路について $a_{ii}a_{ii}=1$ が成立し、 $a_{ii} \geq 0$ ならば $a_{ii}=1$ なので性質7を得る。 $a_{ii} < 0$ をも許容するならば、 $a_{ii}=-1$ も解となり、 C_1 不成立である。

[性質8] C_3 成立 $\leftrightarrow a_{ij}a_{jk}a_{ki}=1$ (i, j, k 重複を許す) $\square$

[性質9] SC_3 成立 $\leftrightarrow a_{ij}a_{jk}a_{ki}=1$ (i, j, k 重複をさない：三角整合性) $\square$

性質8, 9は C_3, SC_3 の定義そのものである。

[性質10] C_3 成立 $\rightarrow SC_3$ 成立 $\square$

[性質11] C_3 成立 $\rightarrow$ 三角整合性 $\square$

ここで、三角整合性とは(1)において、 i, j, k が異なり、かつ逆比性(4)成立する場合を言う。

同様に四角整合性、 m 点整合性($m \geq 2$)について以下が成立する。

[性質12] 四角整合性 $\leftrightarrow a_{ij}a_{jk}a_{kl}a_{li}=1$ (i, j, k, l 重複を許さない) (5) $\square$

[性質13] SC_4 成立 $\leftrightarrow a_{ij}a_{jk}a_{kl}a_{li}=1$ (i, j, k, l 重複を許さない) $\square$

[性質14] C_4 成立 $\leftrightarrow a_{ij}a_{jk}a_{kl}a_{li}=1$ (i, j, k, l 重複を許す) $\square$

[性質15] C_4 成立 $\rightarrow SC_4$ 成立 $\square$

[性質16] 単純閉路 m 点整合性 SC_m 成立 $\leftrightarrow a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}a_{i_3i_4} \cdots$

$a_{i_m-1i_m}a_{i_mi_1}=1$ ($i_1, i_2, \dots, i_m$ 重複を許さない) (6) $\square$

[性質17] m 点整合性 C_m 成立 $\leftrightarrow a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}a_{i_3i_4} \cdots a_{i_m-1i_m}a_{i_mi_1}=1$ ($i_1, i_2, \dots, i_m$ 重複を許す) (7) $\square$

[性質18] C_m 成立 $\rightarrow SC_m$ 成立 $\square$

性質16, 17は定義であり、 $G(N, A)$ での閉路集合に単純閉路は含まれるので、性質18が成立する。 $n > m$ とし、長さ n の点重複許容する閉路集合には、自己閉路を考慮すれば長さ m の点重複許容する閉路が含まれるので、自己同値性($a_{ii}=1, C_1, SC_1$)が成立すれば、次の性質19が成立する。

[性質19] C_n 成立 $\rightarrow C_m$ 成立(但し、 $n > m, a_{ii}=1$) $\square$

C_m, C_n について性質19の逆方向の関係は、 $G(N, A)$ が完全有向グラフ(すなわち、完全情報)では、一般に長さ $n (> 3)$ の閉路は、例えば、より短い長さ $n_1+1 (> 2), n_2+1 (> 2)$ の閉路に1つの枝を逆方向に共有して分解できるので(図1)、その枝での逆比性が成立すれば、次の性質20が成立する。

[性質20] $n > m$ なるすべての m について C_m 成立 $\rightarrow C_n$ 成立(但し、 $n > 3$ 、逆比性成立： $a_{ij}a_{ji}=1$ ($i \neq j$)) $\square$

なお、性質20において、性質4より、 C_2 成立すれば逆比性も成立するので、括弧内の逆比性成立は省略できる。

性質19, 20より、自己同値性と逆比性の下では完全グラフの

$G(N, A)$ に対して次の性質21が成立する。

[性質21] C_n 成立 $\leftrightarrow C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_2, C_1$ 成立($n > 3$) $\square$

なお、性質21は $n > 3$ 以上で成立し、例えば $n=3$ では「 C_3 成立 $\leftrightarrow C_2, C_1$ 成立」となるが、本命題は必ずしも成立しない(例1参照)。

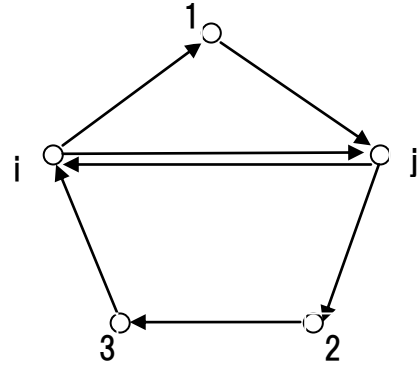


図1：長さ $n (=5)$ の閉路 $(1 \rightarrow j \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow i \rightarrow 1)$ の長さ $n_1+1 (=3)$ の閉路 $(1 \rightarrow j \rightarrow i \rightarrow 1)$ と長さ $n_2+1 (=4)$ の閉路 $(i \rightarrow j \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow i)$ への枝 (i, j) を逆方向に共有した分解

[例1] 性質21が成立しない例($n=3$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

(7)では C_1 と C_2 が成立しているが、三点整合性 C_3 が不成立である。

次に SC_m と C_m, SC_m 間の性質を調べる。

性質18と21より、次の性質22を得る。

[性質22] 完全グラフ $G(N, A)$ について、 $C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_2, C_1$ 成立 $\rightarrow SC_n$ 成立($n > 3$) $\square$

又、性質20において、長さ n の閉路を分解する閉路長を n_1+1, n_2+1 に限定し($n=n_1+n_2, n_1 > 1, n_2 > 1$)かつ閉路の単純性(節点の非重複性)を考慮すると、次の性質23を得る。

[性質23] 完全グラフ $G(N, A)$ について、 SC_{n_1+1}, SC_{n_2+1} 成立 $\rightarrow SC_n$ 成立(但し、 $n=n_1+n_2, n_1 > 1, n_2 > 1$ 、逆比性成立) $\square$

5. おわりに(今後の課題)

【1】 不完全情報下の不完全グラフ $G(N, A)$ について、性質20, 21, 22, 23に対応する性質等の考察。

【2】 性質20の詳細・限定版の考察。

【3】 性質23の逆命題の考察。

【4】 閉路整合性(2)と径路整合性(3)の関連性の考察。

【5】 径路整合性(3)にもとづく諸性質の考察。

【6】 閉路整合性(2)、径路整合性(3)とCI値、パワー法、固有値との関連の考察。