

一般逆行列に基づく応力法によるピン接合立体トラスの自由振動解析

- 変位モードによる定式化 -

日大生産工 (院) ○高田 収 日大生産工 川島 晃
(株) 中田捷夫研究室 常川 重樹

1. はじめに

応力法は、系全体の釣合式が長方マトリックスで表現されるため、ガウス・ジョルダン法を用いて正方マトリックスにするための努力に費やされた^{1), 2)}。この解法はマトリックス演算上の分析が必要なため、コンピュータによる自動計算には不向きであると指摘されている³⁾。Patnaik ら⁴⁾ は仮想仕事法により得られる系全体の釣合式と適合条件式を結合することにより材端応力 (断面力) を直接求める解法を提案した。この解法では系全体の支配方程式を不静定次数まで下げる応力法の利点が失われる。川島らは線形方程式系の数値計算法として有効なムーア・ペンローズ一般逆行列⁵⁾に基づく応力法を提案している^{6)~8)}。また、応力モードによる骨組構造の自由振動解析を提案している^{9), 10)}。

本報では変位法との関係性を明確にすることおよび計算効率の改善を目的として、これまでほとんど試みられてこなかった変位モードによるピン接合立体トラスの自由振動解析を提案する。

2. 座標と仮定および記号

図1の $x_{i(i=1,2,3)}$ は全体座標で右手系に設定する。

本報の定式化は等断面直線材で構成されたピン接合立体トラスで、部材はヤング係数 E をもつ。

解析記号は英文字とギリシャ文字を用い、小文字細字はスカラー、小文字太字はベクトル、大文字太字はマトリックスを表わす。肩付添字 T はベクトルおよびマトリックスの転置を、肩付添字 $+$ はムーア・ペンローズ一般逆行列を表す。

3. 基本関係式

3.1 力の釣合式 図1に示す部材 (p) の軸力 $n(p)$ と材端力 $f_{(A,p)}, f_{(B,p)}$ の関係は、次式で表せる。

$$\begin{bmatrix} f_{(A,p)} \\ f_{(B,p)} \end{bmatrix} = n(p) \begin{bmatrix} -\lambda(p) \\ \lambda(p) \end{bmatrix} \quad (1)$$

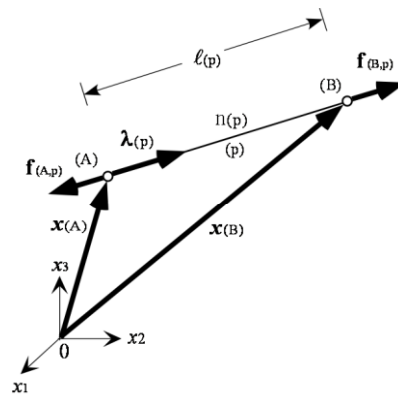


図1 座標系と部材の力学的諸量

式(1)の $\lambda(p)$ は部材の方向を示す単位ベクトルである。式(1)は系全体に亘ってまとめる。図2に示す立体トラスの一部については表1のようになる。次に、荷重 $f_{(1)} \sim f_{(4)}$ と部材 (p) の材端力 $f_{(A,p)}, f_{(B,p)}$ の関係は部材端と節点の接続関係から表2のようになる。表中の I_3 は (3×3) の単位マトリックスである。表1と表2は次式で表す。

$$\tilde{f} = Bn \quad (\text{表1}), \quad f = Q\tilde{f} \quad (\text{表2}) \quad (2), (3)$$

軸力ベクトル n と荷重ベクトル f の関係は式(2)と式(3)より次式で表せる。

$$f = QBn = Dn \quad (4)$$

ここに、

$$f = [f_1, f_2, f_3]^T, \quad n = [n_1, n_2, \dots]^T \quad (5), (6)$$

3.2 幾何学的関係式 図3は部材 (p) に用いる幾何学的諸量である。部材 (p) の伸縮 $\Delta l(p)$ と材端変位 $u_{(A,p)}, u_{(B,p)}$ (図3) の関係は式(8)で表せる。

$$\Delta l(p) = \begin{bmatrix} -\lambda(p)^T & \lambda(p)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{(A,p)} \\ u_{(B,p)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式(8)を系全体に亘ってまとめる。図2に示す立体トラスの一部については表3のようになる。また、材端変位ベクトル $u_{(A,p)}, u_{(B,p)}$ と節点変位ベクトル $u_{(N)} (N=1,2,\dots)$ の関係は表4のように表せる。

表3と表4は式(9)と式(10)で表す。

The Free Vibration Analysis of Pin Joint Space Truss by Stress Method based on Generalized Inverse

- Formulization by displacement's mode -

Osamu TAKADA, Akira KAWASHIMA and Shigeki TSUNEKAWA

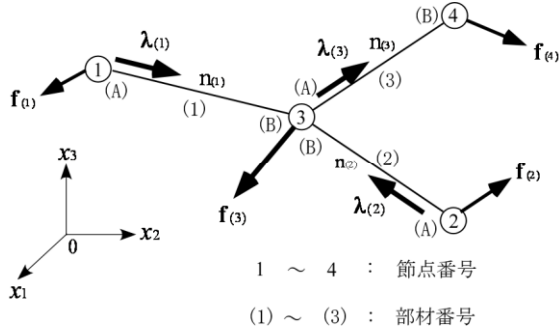


図2 立体トラスの一部

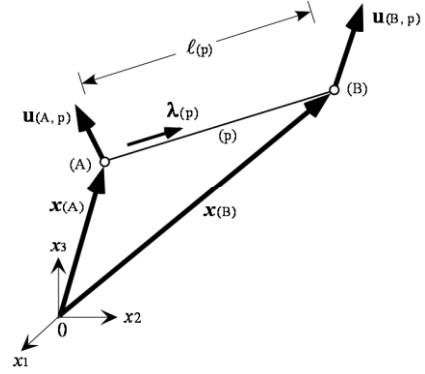


図3 部材の幾何学的諸量

表1 材端力と軸力の関係
(二重枠内：マトリックス $\mathbf{B}$)

材端力 \ 軸力	$n(1)$	$n(2)$	$n(3)$
部材 (1)	$\mathbf{f}_{(1,1)}$	$\mathbf{f}_{(3,1)}$	
(2)	$\mathbf{f}_{(2,2)}$	$\mathbf{f}_{(3,2)}$	
(3)	$\mathbf{f}_{(3,3)}$	$\mathbf{f}_{(4,3)}$	

表2 節点荷重と材端力の関係
(二重枠内：マトリックス $\mathbf{Q}$)

材端力 \ 荷重	部材 (1)	(2)	(3)
$\mathbf{f}_{(1)}$	$\mathbf{I}_3$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{f}_{(2)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}_3$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{f}_{(3)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}_3$	$\mathbf{I}_3$
$\mathbf{f}_{(4)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}_3$

$$\Delta \mathbf{l} = \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{表3}), \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{u} \quad (\text{表4}) \quad (9), (10)$$

伸縮ベクトル $\Delta \mathbf{l}$ と節点変位ベクトル $\mathbf{u}$ の関係は式(9)と式(10)より次式で表せる。

$$\Delta \mathbf{l} = (\mathbf{Q}\mathbf{B})^T \mathbf{u} = \mathbf{D}^T \mathbf{u} \quad (11)$$

ここに、

$$\Delta \mathbf{l} = [\Delta \ell(1), \Delta \ell(2), \dots]^T \quad (12)$$

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}(1), \mathbf{u}(2), \dots]^T \quad (13)$$

3.3 構成式

部材 (p) の柔性を $S_{(p)}$ とすると構成式は式(14)で表せる。

表3 幾何学的関係
(二重枠内：マトリックス $\mathbf{B}^T$)

材端変位 \ 伸縮	部材 (1)	(2)	(3)
$\Delta \ell(1)$	$-\lambda_{(1)}^T, \lambda_{(1)}^T$	$\mathbf{0}, \mathbf{0}$	$\mathbf{0}, \mathbf{0}$
$\Delta \ell(2)$	$\mathbf{0}, \mathbf{0}$	$-\lambda_{(2)}^T, \lambda_{(2)}^T$	$\mathbf{0}, \mathbf{0}$
$\Delta \ell(3)$	$\mathbf{0}, \mathbf{0}$	$\mathbf{0}, \mathbf{0}$	$-\lambda_{(3)}^T, \lambda_{(3)}^T$

表4 節点変位と材端変位の関係
(二重枠内：マトリックス $\mathbf{Q}^T$)

材端変位 \ 節点変位	$\mathbf{u}(1)$	$\mathbf{u}(2)$	$\mathbf{u}(3)$	$\mathbf{u}(4)$
部材 (1)	$\mathbf{I}_3$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
(2)	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}_3$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
(3)	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}_3$	$\mathbf{0}$

$$\Delta \ell_{(p)} = S_{(p)} n_{(p)} \quad (14)$$

ここに、

$$S_{(p)} = \frac{\ell_{(p)}}{EA_{(p)}} \quad (15)$$

式(14)は、部材全体にまとめて次式で表す。

$$\Delta \mathbf{l} = \mathbf{S} \mathbf{n} \quad (16)$$

$\mathbf{S}$ は $S_{(p)}$ を対角項に並べたマトリックスである。

4. 釣合式の一般解とその性質

ムーア・ペンローズ一般逆行列は、肩付き+で表す。釣合式(式(4))の一般解 $\mathbf{n}$ は特解を $\mathbf{n}^p$ 、余解(同次方程式の解)を $\mathbf{n}^c$ と書くと

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}^p + \mathbf{n}^c \quad (17)$$

ここに、

$$\mathbf{n}^p = \mathbf{D}^+ \mathbf{f} \quad (18)$$

$$\mathbf{n}^c = (\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D}) \boldsymbol{\beta} \quad (19)$$

上式右辺の $\mathbf{I}$ は単位マトリックス、 $\boldsymbol{\beta}$ は任意ベクトルである。また、 $(\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D})$ の各列ベクトルは自己釣合系の軸力モードを表している。

一般解の力学的内容は次の通りである。

- 1) $\mathbf{n}^p$ は釣合の最適近似解 (文献 5)) を与える。
- 2) $\mathbf{n}^c$ は変形の適合条件を満たすための軸力を表す。つまり、 $\mathbf{n}$ と $\mathbf{n}^c$ のノルム比 ($|\mathbf{n}^c|/|\mathbf{n}|$) は各部材の柔性関係に依存する軸力の感度を表す。

次に、一般逆行列に関する数値計算上の取り扱いを述べる。 (n, m) 型釣合マトリックス $\mathbf{D}$ のランクは安定構造では n ($\leq m$) であり、 $\mathbf{D}^+$ は (n, n) 型対称マトリックス $\mathbf{D}\mathbf{D}^T$ を用いて式 (20) で求まる。

$$\mathbf{D}^+ = \mathbf{D}^T (\mathbf{D}\mathbf{D}^T)^{-1} \quad (20)$$

また、 $(\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D})$ の独立な列ベクトルはグラムシュミットの直交化法を用いると計算効率 (文献 11)) が良い。この自己釣合応力系の独立ベクトルで作るマトリックスを $\mathbf{G}$ とし、 $\boldsymbol{\beta}$ をその任意性より $\boldsymbol{\gamma}$ に置き換えると余解 $\mathbf{n}^c$ (式 (19)) は次式のように表せる。

$$\mathbf{n}^c = (\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D}) \boldsymbol{\beta} \equiv \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma} \quad (21)$$

上式において、

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_r] \quad (22)$$

ここに、 $(\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D})$ のランク (不静定次数) r は次式で求められる。

$$r = \text{trace}(\mathbf{I} - \mathbf{D}^+ \mathbf{D}) \quad (\text{対角項の総和}) \quad (23)$$

5. 変形の適合条件式

変形の適合条件式は、自己釣合応力系を仮想力とすると次式のように表せる。

$$\mathbf{G}^T \Delta \mathbf{l} = \mathbf{0} \quad (24)$$

式 (24) 左辺に構成式 (式 (16)) を代入すると、適合条件式は次式で表せる。

$$\mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (25)$$

系全体の幾何学的関係式 (式 (11)) より

$$\mathbf{u} = (\mathbf{D}^T)^+ \Delta \mathbf{l} = (\mathbf{D}^+)^T \Delta \mathbf{l} \quad (26)$$

で節点変位ベクトル $\mathbf{u}$ が求まる。

式 (26) は式 (11) の特解のみ取り上げているが、余解は (変形ベクトル $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ で生じる) リンク機構の節点変位ベクトルを表すから省略している。

6. 応力法と変位法による系統的な自由振動解析

6.1 自由振動方程式

常用されている骨組構造の自由振動方程式は、式 (27) で表せる。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (27)$$

この連立 2 階微分方程式の解は振幅マトリックス $\boldsymbol{\Gamma}$ 、固有振動数 ω とすると次式で表せる¹²⁾。

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{e}^{i\omega t} \quad (28)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{e}^{i\omega t} = -\omega^2 \mathbf{u} \quad (29)$$

式 (29) を式 (27) に代入すると自由振動方程式は次式で表せる。

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u} + \mathbf{D} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (30)$$

6.2 応力法

式 (30) 左辺第 1 項 (慣性力) を右辺に移項する。

$$\mathbf{D} \mathbf{n} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u} \quad (31)$$

上式の特解は式 (18) より次式で与えられる。

$$\mathbf{n}^p = \mathbf{D}^+ (\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}) \quad (32)$$

変形の適合条件式 (式 (25)) は

$$\mathbf{G}^T \mathbf{S} (\mathbf{n}^p + \mathbf{n}^c) = \mathbf{G}^T \mathbf{S} (\mathbf{n}^p + \mathbf{G} \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{0} \quad (33)$$

上式より

$$\boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{n}^p \quad (34)$$

ここに、

$$\mathbf{C} = \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} \quad (35)$$

である。 $\boldsymbol{\gamma}$ を式 (21) に代入すると余解 $\mathbf{n}^c$ は

$$\mathbf{n}^c = -\mathbf{G} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{n}^p \quad (36)$$

$\mathbf{n}$ の一般解 (式 (17)) に式 (36) を代入する。

$$\mathbf{n} = (\mathbf{I} - \mathbf{G} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{S}) \mathbf{n}^p \quad (37)$$

節点変位ベクトル $\mathbf{u}$ (式 (26)) は構成式 (式 (16)) を用いると

$$\mathbf{u} = (\mathbf{D}^+)^T \mathbf{S} \mathbf{n} \quad (38)$$

となる。上式右辺に式 (37) と式 (32) を代入する。

$$\mathbf{u} = (\mathbf{D}^+)^T \mathbf{S} (\mathbf{I} - \mathbf{G} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{S}) \mathbf{D}^+ (\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}) \quad (39)$$

ここに、

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (40)$$

とおくと固有振動数方程式は、

$$\lambda \mathbf{u} = \mathbf{F}_s \mathbf{u} \quad (41)$$

となる。ここに、

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{M} \quad (42)$$

である。上式右辺の $\mathbf{K}_s^{-1}$ は

$$\mathbf{K}_s^{-1} = (\mathbf{D}^+)^T \mathbf{S}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{S})\mathbf{D}^+ \quad (\text{不静定系}) \quad \dots (43)$$

である。上式右辺 () 内第 2 項の $\mathbf{S}\mathbf{G}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}^T \mathbf{S}$ は変形の適合条件を満たすための柔性を表している。一方、静定系 ($n = m$) では、

$$\mathbf{K}_s^{-1} = (\mathbf{D}^+)^T \mathbf{S}\mathbf{D}^+ \quad (\text{静定系: } \mathbf{D}^+ = \mathbf{D}^{-1}) \quad (44)$$

6.3 変位法

構成式 (式(16)) の逆関係は次式で表す。

$$\mathbf{n} = \mathbf{S}^{-1} \Delta \mathbf{l} \quad (45)$$

復元力 $\mathbf{D}\mathbf{n}$ (式(30)) は上式と幾何学的関係式 (式(11)) より

$$\mathbf{D}\mathbf{n} = \mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{u} \quad (46)$$

で表せる。上式を自由振動方程式 (式(30)) に代入すると、

$$\mathbf{u} = (\mathbf{D}^+ \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}^T)^{-1} (\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{u}) \quad (47)$$

式(47)は式(40)を用いると

$$\lambda \mathbf{u} = \mathbf{F}_d \mathbf{u} \quad (48)$$

で表せる。ここに、

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{K}_d^{-1} \mathbf{M} \quad (49)$$

である。上式右辺の $\mathbf{K}_d^{-1}$ は

$$\mathbf{K}_d^{-1} = (\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}^T)^{-1} \quad (50)$$

である。静定系では

$$\mathbf{K}_d^{-1} = (\mathbf{D}^{-1})^T \mathbf{H}\mathbf{D}^{-1} \quad (51)$$

であるから式(44)と同一式である。

6.3 アルゴリズム

応力法の解式をまとめると次のようになる。

- 1) 式(41)より λ と $\mathbf{u}$ のモード (正規化ベクトル) を求める。
 - 2) 慣性力による特解 $\mathbf{n}^p$ は式(32)で求まる。適合条件に依存する余解 $\mathbf{n}^c$ は式(36)で求まる。
 - 3) 一般解 $\mathbf{n}$ は式(37)で求まる。
- 変位法の解式をまとめると次のようになる。
- i) 式(48)より λ と $\mathbf{u}$ のモードを求める。
 - ii) $\mathbf{n}$ は構成式 (式(45)) と幾何学的関係式 (式(11)) より次式で求まる。

$$\mathbf{n} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{u} \quad (52)$$

7. まとめ

本論文では変位法との系統的な動特性の分析に向けて、これまでほとんど試みられてこなかった変位モードで書き下した応力法によるピン接合立体トラスの自由振動解析を示した。

- 1) 変位法を補間する力学的内容としては、適合条件に依存する自由振動数を分析できる。
- 2) また、適合条件に依存する軸力モードの感度特性 ($|\mathbf{n}|/|\mathbf{u}|$) を分析できる (第 4 節)。これは弾塑性構造体の冗長性の評価に繋がる。
- 3) アルゴリズムについては自己釣合軸力系 $\mathbf{G}$ (第 4 節) の計算が追加されるため変位法に比べ煩雑となることは否めないが、計算効率は釣合式と適合条件式を結合する解法 (応力の未知数 m) に比べ、節点変位モード (自由度 $n < m$) による定式化により改善される。

参考文献

- 1) Robinson, J. : Integrated Theory of Finite Element Methods, John Wiley & Sons, 1973
- 2) Kaneko, I. : Lawo, H. and Thierauf, G. On computational procedures for the force method. Int. J. Numer. Methods Eng. 18: 1469-1495, 1983
- 3) Raju, Krishnam N.R.B. and Nagabhushanam, J. : Nonlinear structural analysis using integrated force method. In: Sadhana Academy Proceedings In Engineering Sciences, 25, pp.353-365., 2000
- 4) Kaljevic, L., Patnaik, S.N. and Hopkins, D.A : Three-Dimensional Structural analysis by the Integrated force method, Computers & Structures, Vol.58, NO.5, pp.869-886, 1996
- 5) 半谷裕彦、川口健一: 形態解析・一般行列の応用、培風館、1991. 4
- 6) 花井重孝、川島晃、石丸麟太郎、田中尚: 立体ラーメンの微小変位応力解析 (その 2 応力法)、日本建築学会構造系論文集、第 570 号、pp. 61-68、2003. 8
- 7) 川島晃、花井重孝: 一般逆行列に基づく応力法による立体トラスの有限変位応力解析、構造工学論文集, Vol. 54B, pp. 241-250, 2008. 3
- 8) A. Kwashima, Y. Takeuchi, and S. Hanai: Shape Analysis of Self-Equilibrating Cable Networks with Initial Tension Adjusted by Stress Method, Journal of Structural Engineering, Vol. 57B, pp. 47-54, 2011. 3
- 9) 川島晃、常川重樹、仲本翔: 一般逆行列に基づく応力法による平面骨組の自由振動解析の定式化 (その 1, その 2)、日本建築学会大会学術講演会梗概集, 2011. 8
- 10) 高田収、川島晃、常川重樹: 応力法による立体トラスの線形弾性自由振動解析の定式化、日本大学生産工学部第 44 回学術講演会, pp. 595-598, 2011. 12
- 11) 川島 晃: 変位法および応力法による立体骨組の構造解析に関する研究、日本大学学位論文、2006. 3
- 12) 川井忠彦著: マトリックス法振動および応答-コンピュータによる構造工学講座 I-4-B、日本鋼構造協会編、培風館、1971. 2