

DMU別生産可能規模伸縮率を持つDEA凸包の拡大BCCモデル

日大生産工

○篠原 正明

日本プロセス株式会社

長谷川 諒

1. はじめに

生産可能集合PPSを定める各DMUの入力データ組 (x , y) は、生産可能規模伸縮率 p を用いることにより、それらを p 倍した (px , py) の入出力データ組をPPSを規定するのに考慮できる。 $p > 1$ の場合が入出力データの伸長拡大であり、例えば、 $p = 2$ では、2倍の入出力データを持つDMU (生産活動) を、 $p < 1$ の場合が入出力データの縮少を意味し、例えば、 $p = 0.25$ では、1/4倍の入出力データを持つDMUを想定する。全DMUの共通の伸縮率を想定すると、既存のDEA凸包モデルとなるが、本論文では、DMU別に伸縮率 p が異なるDEAモデルに対して、既存のBCCモデルに基づく「拡大BCC解法」を提案する。

なお、提案する「DMU別生産可能規模伸縮率を持つDEA凸包の拡大BCCモデル」は、例えば、巨大化した生産活動DMUと極小の生産活動DMUに対して、共通の生産可能規模伸縮率 p を適用するのが妥当かという現実問題の疑問を解決する際に生じたDEAの応用モデルである。巨大化した生産活動DMUに対してはこれ以上の規模拡大は不適切かもしれないが、極小の生産活動DMUに対してはさらなる規模拡大は当然かもしれない。このように規模伸縮率 p はDMU別に異なりうると考えられる。

2. BCC凸包モデルのPPS

基本BCCモデルのPPS (x , y) は以下の (1) ~ (4) で与えられる。

$$x \geq X\lambda \quad (1)$$

$$y \leq Y\lambda \quad (2)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (3)$$

$$e\lambda = 1 \quad (4)$$

但し、 $X = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ 、 $Y = (y_1, \dots, y_j, \dots, y_n)$ である。

(4) において、 $e\lambda = p$ とした変形BCCモデルを考える。

$$e\lambda = p \quad (> 0) \quad (5)$$

(5) の両辺を p で割り、 $s = \lambda/p$ と変数変換すると、次式 (6) ~ (9) を得る。

$$x \geq pXs \quad (6)$$

$$y \leq pYs \quad (7)$$

$$s \geq 0 \quad (8)$$

$$es = 1 \quad (9)$$

すなわち、(5) 式の p は全DMUの入出力データ行列 (X , Y) を一律 p 倍した (pX , pY) の乗数倍率と解釈できる。同様に、凸包モデルのPPS (x , y) は、(10) ~ (13) で与えられるが、 $s = \lambda/p$ で変数変換し、共通伸縮率 p を用いて、(14) ~ (18) を得る。なお、共通伸縮率 p の「共通」とは正確には、入力と出力に共通かつ全DMUに共通という意味である。

「凸包モデルのPPS (x , y)」

$$x \geq X\lambda \quad (10)$$

$$y \leq Y\lambda \quad (11)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (12)$$

$$L \leq e\lambda \leq U \quad (13)$$

「共通伸縮率 p を用いた凸包モデルのPPS (x , y)」

$$x \geq pXs \quad (14)$$

$$y \leq pYs \quad (15)$$

$$s \geq 0 \quad (16)$$

$$es = 1 \quad (17)$$

$$L \leq p \leq U \quad (18)$$

ここで (14) ~ (17) は $e\lambda = p$ とした変形BCCモデルのPPSに一致しており、(18) より共通伸縮率 p のとりうる範囲を規定している。

Extended BCC Model of DEA Convex Hull
with DMU-dependent Production-Possibility-Scale Adjustment Factor
Masaaki SHINOHARA and Ryou Hasegawa

3. DMU別伸縮率を持つDEA凸包モデル

DMU毎に共通でない伸縮率 (DMU j が p_j) を持つ場合のDEA凸包モデルを以下に考察する (文献「1」参照)。

(14)、(15) をベクトル x_j, y_j で再表現すると、(19)、(20) となる。

$$x \geq \sum p_j x_j s_j \quad (19) \quad y \leq \sum p_j y_j s_j \quad (20)$$

(19)、(20) における共通伸縮率 p をDMU別伸縮率 p_j に置換することにより、DMU別伸縮率を持つDEA凸包モデルのPPS (x, y) は(21)～(25) で与えられる。

$$x \geq \sum p_j x_j s_j \quad (21) \quad y \leq \sum p_j y_j s_j \quad (22)$$

$$s \geq 0 \quad (23) \quad \sum s = 1 \quad (24) \quad L \leq p \leq U \quad (25)$$

ここで(18)の L, p, U はスカラー値であるが、(25)の L, p, U はベクトルであり、(26) で表記できる。

$$L_j \leq p_j \leq U_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (26)$$

従って、DMU別伸縮率を持つDEA凸包モデルのDMU k の入力指向効率値 θ_k を計算する効率性評価問題は(27)～(32) で定式化される。

$$Z = \theta_k \rightarrow \text{MIN} \quad (27)$$

$$\theta_k x_k \geq \sum p_j x_j s_j \quad (28)$$

$$y_k \leq \sum p_j y_j s_j \quad (29)$$

$$s \geq 0 \quad (30) \quad \sum s = 1 \quad (31) \quad L \leq p \leq U \quad (32)$$

同様に、出力指向効率値 η_k を計算する効率性評価問題は(33)～(38) で定式化される。

$$w = \eta_k \rightarrow \text{MAX} \quad (33)$$

$$x_k \geq \sum p_j x_j s_j \quad (34)$$

$$\eta_k y_k \leq \sum p_j y_j s_j \quad (35)$$

$$s \geq 0 \quad (36) \quad \sum s = 1 \quad (37) \quad L \leq p \leq U \quad (38)$$

(27)～(32) において、変数は θ_k, p, s であり、従って、本問題は(28) (29) の非線形性「 $p_j s_j$ 」より、非線形計画問題となる。

4. DMU別伸縮率を持つDEA凸包モデルに対する拡大BCCモデル (文献「3」参照)

拡大BCCモデルとは、入出力データ行列 (X, Y) を持つ既

存の n 個のDMU群に加えて、下限入出力データ行列 (X_L, Y_L) を持つ n 個の下限DMU群と上限入出力データ行列 (X_U, Y_U) を持つ n 個の上限DMU群の合計 $3n$ 個のDMU群に対して、

(1)～(4) の基本BCCモデルを適用するアプローチである。なお、下限DMU群と上限DMU群はPPSを縮小・拡大するための仮想的なDMUなので、これらに対して効率値を求める必要はない。

5. 評価例

2つの例を通して、エクセルのソルバー機能を用いた非線形計画法(27)～(32)による求解結果と既存のソフトウェアであるDEAソルバー「2」を用いた拡大BCCモデルにもとづく求解結果が一致することを検証する。

「例1：1入力1出力モデル」

表1に入出力データと伸縮率上下限值データを示す。

両アプローチによる効率値 θ の計算結果は小数点以下も完全に一致した。その結果を表2に示す。なお、非線形計画法による求解では非線形性ゆえに局所最適解に陥ることが頻発しており、エクセルのソルバーでは複数の出発点を設定することにより対処した。一方、拡大BCCモデルにもとづく求解結果ではDMU数は3倍となるが、問題がLPにとどまっているため既存のDEAソルバー「2」により解を求めることが出来た。ここで、DMU_{H1}、DMU_{H2}は拡大BCCモデルでのDMU_Hの伸縮率下限値 $p_{HL} = 0.1$ と伸縮率上限値 $p_{HU} = 2.0$ に対応する仮想DMUである。付録1にDMU_Aについての効率値 θ_A の定式化を示す。又、付録2に図的解法を示す。(例1の終わり)

表2：例1の効率値 θ (score) とRTSの計算結果

DMU	Score	RTS	RTS of Projected DMU
A	0.6398305		Increasing
B	1	Constant	
C	0.5672727		Decreasing
D	0.4576271		Increasing
E	0.5353107		Increasing
F	0.4058876		Increasing
G	0.3973064		Decreasing
H	0.5968523		Increasing
I	0.1871469		Increasing
H1	1	Increasing	
H2	1	Decreasing	

「例2：1入力2出力モデル」

表3に入出力データと伸縮率上下限值データを示す。

例1と同様に、両アプローチによる効率値 θ の計算結果は表4に示すように完全に一致した。(例2の終わり)

表4：例2の効率値 θ (Score) とRTSの計算結果

DMU	Score	RTS	RTS of Projected DMU
A	0.7037037		Constant
B	1	Constant	
C	0.5672727		Constant
D	1		Constant
E	0.8179012		Constant
F	0.4058876		Constant
G	0.5034294		Constant
H	1	Constant	
I	0.3888889		Constant
H1	1	Constant	
H2	1	Constant	

6、おわりに

数学的には(1)～(4)で規定される基本BCCモデルのPPSは、現存DMU集合の入出力データ行列(X、Y)をベースに、『現存DMU $j_1(x_{j1}, y_{j1})$ と現存DMU $j_2(x_{j2}, y_{j2})$ の凸結合もPPSに含まれ、又、DMU j がPPSに含まれるなら、 $x \geq x_j$ かつ $y \leq y_j$ を満足する(x、y)もPPSに含まれ』という規則により構成される。

一方、数学的には(10)～(13)で規定される上下限制約付凸包モデルのPPSは現存DMU $j(x_j, y_j)$ の入出力データベクトルを共にp倍したDMU $j(p)(px_j, py_j)$ ($L \leq p \leq U$)($j = 1, \dots, n$)をも仮想的な現存DMUとして扱う変形BCCモデルのPPSと解釈できる。ここで、伸縮率pは全現存DMU群に共通である。全DMU群に共通とは、全DMUが置かれた生産活動規模の拡大縮小許容度の状況が同じであることを意味している。

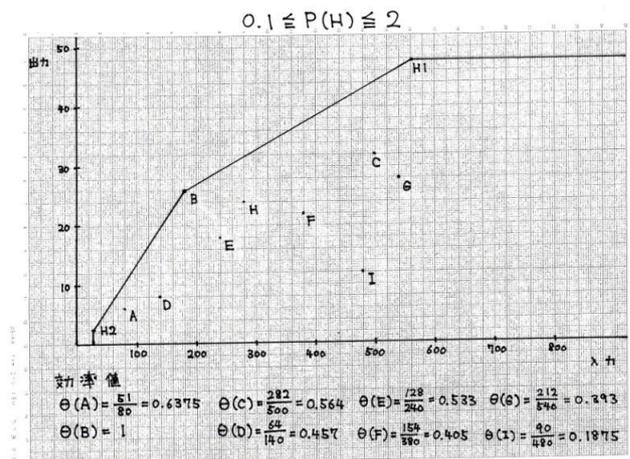
本論文では、この規模伸縮率pがDMU j に依存して p_j 、従って、上下限も(L_j, U_j)与えられる「DMU別規模伸縮率を持つDEA凸包モデル」を提案した。特殊な非線形計画法による定式化、

ならびに、拡大BCCモデルによる2つのアプローチにより効率値を計算し、両計算結果が一致することを確認した。規模伸縮率がDMU毎に異なりうるとは、各DMUが置かれた生産活動規模の拡大縮小許容度の環境状況が必ずしも同じではないことを意味する。例えば、5章の評価例1、2においては、DMU H のみがDMU H の事情により、規模の縮小と拡大を許容している。又、DMUによっては規模の収穫増加型のものもあれば、規模の収穫減少型のものもあり、その混在も考慮できる。また、上下限DMU群、局所最適解に対応した効率値の意味づけなどは、今後の課題である。

参考文献

- 「1」長谷川 諒：「DMU別生産可能伸縮率を持つDEA凸包モデル」、平成22年度 日本大学生産工学部数理情報工学科 卒業研究論文(2011.2).
- 「2」刀根 薫：経営効率性の測定と改善～包絡分析法DEAによる～、日科技連、1993年.
- 「3」吉村 彩、大澤 慶吉、篠原 正明：凸包モデルの生産可能集合の解釈と一般化、日本大学生産工学部・第40回学術講演会・数理情報部会pp. 83-86(2007-12-1)

付録2：評価例1の図的解法



図A2-1：評価例1の図的解法 (文献「1」のp.87より)

表1：例1の入出力データと伸縮率上下限值データ

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力データ x	8	18	50	14	24	38	54	28	48
出力データ y	6	26	32	8	18	22	28	24	12
下限値PL	1	1	1	1	1	1	1	0.1	1
上限値PU	1	1	1	1	1	1	1	2.0	1

表3：例2の入出力データと伸縮率上下限值データ

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I
入力データ x	8	18	50	14	24	38	54	28	48
出力データ y 1	5	10	9	15	20	8	25	30	20
出力データ y 2	6	26	32	8	18	22	28	24	12
下限値PL	1	1	1	1	1	1	1	0.1	1
上限値PU	1	1	1	1	1	1	1	2.0	1

付録1：評価例1の非線形計画定式化

「DMUAのDEA効率化値 θ_A の定式化」

$$z = \theta_A \rightarrow \text{MIN} \quad \text{A1-1}$$

$$8\theta_A \geq 8p_A s_A + 18p_B s_B + 50p_C s_C + 14p_D s_D + 24p_E s_E + 38p_F s_F + 54p_G s_G + 28p_H s_H + 48p_I s_I$$

A1-2

$$6 \leq 6p_A s_A + 26p_B s_B + 32p_C s_C + 8p_D s_D + 18p_E s_E + 22p_F s_F + 28p_G s_G + 24p_H s_H + 12p_I s_I$$

A1-3

$$S^T = (s_A, s_B, s_C, s_D, s_E, s_F, s_G, s_H, s_I) \geq 0 \quad \text{A1-4}$$

$$s_A + s_B + s_C + s_D + s_E + s_F + s_G + s_H + s_I = 1 \quad \text{A1-5}$$

$$p_A = 1, p_B = 1, p_C = 1, p_D = 1, p_E = 1, p_F = 1, p_G = 1, p_I = 1 \quad \text{A1-6}$$

$$0.1 \leq p_H \leq 2.0 \quad \text{A1-7}$$