ISSN 2186-5647

動的平均化プロセスに基づく
固有値・固有ベクトル概念の一般化

日大生産工　　○篠原　正明

1.　はじめに

正方行列Ａに対する固有値λ・固有ベクトルｘを求める問題「$A\,x=\lambda\,x$」をＡＨＰ固有ベクトルで採用した動的平均化プロセス（Dynamic Averaging Process）にもとづき一般化する。

2.　線形システム・動的プロセスの導入

線形システム（1）の動的プロセスを考える。

$$x(t+1)=Ax(t) \tag{1}$$

初期値 x(0)を与えれば、x(t)は(2)となる。

$$x(t)=A^{t}x(0) \tag{2}$$

（1）の随伴システムは(3)となる。

$$y(t+1)=A^{T}y(t) \tag{3}$$

3.　線形システム・動的プロセス上での固有値と固有ベクトル

動的プロセス(1)において、十分大きな時間ｔにおいて、(4)が成り立つ状況を考えよう。

$$x(t+1)\fallingdotseq\lambda x(t) \tag{4}$$

ここで、λはスカラー値であり、(4)は「x(t+1)は要素ごとに x(t)のλ倍」を意味する。線形システムなので、十分に時間経過すれば、(4)が成立すると仮定する。直観的には、λ＞1 で発散、λ＜1 で零への収束、λ＝1 で一定値への収束、λ：複素数で振動、となる。ｔ→∞で x(∞)を x とし、(4)を等号化し、(4)と(1)より、(5)を得る。

$$A\,x=\lambda\,x \tag{5}$$

すなわち、正方行列Ａの固有値λは、対応する動的プロセス(1)における十分に時間経過した後の定常状態での倍率を、固有ベクトルｘは動的プロセス(1)における定常状態ベクトルを意味する。

ここで、「定常状態」とは十分に時間経過した後を意味し、必ずしも値が１つの定常値に落ち着いていることを意味しない。従って、十分大きなｔの x(t)の集合と定常状態ベクトルｘは何らかの操作の下で一致する。

なお、正確には、(5)は右固有値問題であり、左固有値問題は随伴システム(3)の定常状態に対して成立する関係式(6)である。

$$y^{T}A=y^{T}\mu \tag{6}$$

4.　非線形システムの固有値問題

非線形写像(7)を考えよう。

$$y=f(x) \tag{7}$$

但し、ｘ、ｙ、f(x)、共にｎ次元列ベクトルである。

(7)の動的プロセスとして(8)を考え、その定常状態での関係式(9)を仮定する。

$$x(t+1)=f(x(t)) \tag{8}$$

$$x(t+1)\fallingdotseq\lambda x(t) \tag{9}$$

非線形システムなので、一般的に(9)を仮定するのは無理があるが、　ここでは(9)が成立する状況（定常状態条件）を想定する。

非線形なｎ変数ｎ値関数 f(x)に対する固有値問題は(10)を満たすλとｘを求める問題となる。

$$f(x)=\lambda x \tag{10}$$

[例題 4.1]　「$f_1=x_1^2$、$f_2=x_2^2$」

(10)より、 $x_1^2 = \lambda x_1$、$x_2^2 = \lambda x_2$ (11)

(11)より、 $\lambda = x_1 = x_2$ (12)

固有値λが定まらない。ちなみに、定常状態条件も不成立である。

5. ＡＨＰ固有ベクトルの一般化平均概念による一般化

Ａを率比較行列とすると、この率比較行列にもとづくウェイトベクトル x の形成過程として、以下の動的過程を考えよう。

$$x(t+1) = \frac{1}{n} Ax(t) \quad (13)$$

$$x(0) = 1 \quad (14)$$

すなわち、ウェイト初期値は全部 1 で、$a_{kj}x_j(t)$ $(j = 1, \dots, n)$ の算術平均(15)として、$x_k(t+1)$を計算する。

$$x_k(t+1) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} a_{kj}x_j(t) \quad (15)$$

算術平均を p 次一般化平均に置き換えると、(16)を得る。

$$x_k(t+1) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} \left(a_{kj}x_j(t)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (16)$$

ここで、(16)の右辺は p=1 で算術平均、p=-1 で調和平均(17)、p→∞で最大値(18)、p→-∞で最小値(19)、p→0 で幾何平均(20)、等に帰着し、上記以外のパラメタ値 p でも特有の平均値を与えることが知られている。

$$x_k(t+1) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} \left(a_{kj}x_j(t)\right)^{-1}\right)^{-1} \quad (17)$$

$$x_k(t+1) = \max_j\{a_{kj}x_j(t)\} \quad (18)$$

$$x_k(t+1) = \min_j\{a_{kj}x_j(t)\} \quad (19)$$

$$x_k(t+1) = \left(\prod_{j=a}^{n} a_{kj}x_j(t)\right)^{\frac{1}{n}} \quad (20)$$

又、一般化平均の枠組みを超えて、第 k 最大値、中央値、等の代表値関数(21)を導入することもできる。

$$x_k(t+1) = F_k\left(a_{kj}x_j(t) \,\middle|\, j = 1, \dots, n\right) \quad (21)$$

率比較行列 A のウェイトベクトル x としては、一般的には(21)の反復過程中の十分大きな t に関して、ベクトル x(t)が定常状態に到達したならば、そのベクトル x を(21)の反復過程の固有ベクトル、要素 k の x(t+1)の x(t)に対する比率$\lambda_k = x_k(t+1)/x_k(t)$を第 k 行固有値と呼ぶ。

但し、定常状態では、正規化すれば x(t)と x(t+1)は同じなので、第 k 行固有値λ_kは k に依存せず等しい。

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda \quad (22)$$

なお、ここで、定常性の定義は「正規化した後に x(t)と x(t+1)が一致すること」であるが、ウェイトベクトルの形成過程としての意味を考えれば、周期性を考慮した下での正規化後一致性、等の概念をも考慮する必要がある。

6. 差分比較行列の固有ウェイトベクトル

ＡＨＰにおいては、項目ウェイトベクトルを推定する際に用いる項目間測定データとして率比較行列Ａを採用している。率比較行列$A = \{a_{kj}\}$においては、項目 i のウェイトをw_iとするならば、(22)が成立することを想定する。

$$a_{kj} \approx w_k/w_j \quad (22)$$

ところで、比較行列は率比較行列に限定されない。他の代表的なものは差分比較行列Ｂである。差分比較行列$B = \{b_{kj}\}$においては、(23)を想定している。

$$b_{kj} \approx w_k - w_j \quad (23)$$

そこで、この差分比較行列 B にもとづくウェイトベクトルの形成過程として、以下の動的過程を考えよう。

$$x(t+1) = \frac{1}{n} B * x(t) \quad (24)$$

$$x(0) = 0 \quad (25)$$

ここで、(24)の第 k 要素は(26)で定義する。

$$x_k(t+1) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} \left(b_{kj} + x_j(t)\right) \quad (26)$$

ここで、差分比較行列Ｂでは、率比較行列Ａの逆比性$(a_{jk} * a_{kj} = 1)$に相当する歪対称性(27)が

通常成立することが期待できる。

$$b_{jk} + b_{kj} = 0 \tag{27}$$

又、Ａでの推移律($a_{ij} * a_{jk} = a_{ik}$)は、Ｂにおいて(28)となる。

$$b_{ij} + b_{jk} = b_{ik} \tag{28}$$

さらに、$a_{ii} = 1$は$b_{ii} = 0$に対応する。

[例 6.1]

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

歪対称性と推移律が共に成立している。X(0)を与えると、x(1)、x(2)が以下で計算され、収束する。

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}、x(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}、x(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

[例 6.2]

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

歪対称性は成立するが､推移律は不成立である。x(0)、x(1)、x(2)は以下で、収束する。

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, x(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \tag{32}$$

[定理 6.1]

$b_{ii} = 0$、歪対称性が成立する$n \times n$差分比較行列Ｂに対する動的過程(24)は、任意の x(0)に対して、x(1)以降のウェイトベクトルが(33)に収束する。

$$x(1) = x(2) = \cdots = \frac{1}{n}(1^T x(0) 1 + B1) \tag{33}$$

(33)式右辺の括弧内は(34)とも表記できる。

$$1^T x(0) 1 + B1 = \left(1^T x(0) I + B\right) 1 = B'1 \tag{34}$$

但し、１は全要素１の列ベクトル、Ｉは単位行列､B'は全対角要素で$b'_{ii} = b_{ii} + 1^T x(0)$他要素はＢと同じ行列である。すなわち、(35)を得る。

$$x(1) = x(2) = \cdots = \frac{1}{n} B'1 \qquad (34)□$$

なお、定理 6.1 は次の例 6.3 に示すように、「$b_{ii} = 0$、歪対称性」が不成立でも、Ｂの全要素の総和が零($1^T B1 = 0$)ならば成立する。

[例 6.3]

Ｂ、x(0)を(36)で与えると、x(1)、x(2)は(37)となる。

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}、x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}、x(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \tag{37}$$

7. パス代数における固有ベクトル

５章(15)において、率比較行列Ａの一対比較データにもとづき､「項目ｋの項目ｊから判断した暫定ウェイト$a_{kj}x_j$」を項目ｊについて平均化する具体的な手段として｢算術平均｣を採用した。さらに、５章(16)において、「一般化平均」に一般化した。本章では、パス代数Ｐ(⊕,⊗)の視点より考察する。パス代数Ｐ(⊕,⊗)での固有値問題(38)に対する動的プロセス（あるいは、べき乗法）として、(39)を考える。

$$A \boxtimes x = \lambda \boxtimes x \tag{38}$$

$$x(t+1) = A \boxtimes x(t) \tag{39}$$

但し、⊠は行列間演算で B=C ⊠ D の $B = \{b_{ij}\}$は以下で定義される。

$$b_{ij} = \left(c_{i1} \otimes d_{1j}\right) \oplus \left(c_{i2} \otimes d_{2j}\right) \oplus (c_{i3} \otimes d_{3j}) \oplus \ldots \oplus (c_{in} \otimes d_{nj}) \tag{40}$$

(39)は要素毎に記述すると(41)、(42)となる。

$$x_k(t+1) = \left(a_{k1} \otimes x_1(t)\right) \oplus \left(a_{k2} \otimes x_2(t)\right) \oplus \ldots \oplus \left(a_{kn} \otimes x_n(t)\right) \tag{41}$$

$$x_k(t+1) = \sum_{j=1}^{n} \oplus \, (a_{kj} \otimes x_j(t)) \tag{42}$$

率比較行列Ａを対象とすると、一般化乗算（あるいは直列演算）⊗は通常の乗算（×あるいは･）となるが、一般化加算（あるいは並列演算）⊕としては、｢最大値演算ＭＡＸ｣ならびに「最小値演算ＭＩＮ」が代表的であろう。

最大値演算ＭＡＸは楽観的判断を表現している。というのは､｢項目 k の項目 j から判断した暫定ウェイト$a_{kj}x_j$｣を項目 j について平均化､あるいは、代表値選択する際に、項目 j=1～n の中の最大値を採用するからである。又、同様の理由により、最小値演算ＭＩＮは悲観的判断を表現している。又、２項演算としてのＭＡＸ、ＭＩＮに結合律(43)が成立し、かつその多項演算の結果とも一致するので、上記解釈が成立するのであり、2ndＭＡＸ等では、必ずしも成立しない点にも注意を要する。

$$\mathrm{MAX}(\mathrm{MAX}(a,b),c)=\mathrm{MAX}\big(a,\mathrm{MAX}(b,c)\big) \qquad (43)$$

すなわち、２項演算としての一般化乗算⊕は通常の乗算、一般化加算⊕として最大値演算ＭＡＸあるいは最小値演算ＭＩＮを考えると、パス代数Ｐ(⊕,⊗)下の固有値問題(38)ならびに動的プロセス(39)は、ＡＨＰ率比較行列における楽観的あるいは悲観的判断下のウエイト決定プロセスを模擬しているといえる。2ndＭＡＸ等の演算を⊕として採用することは、パス代数の立場からは無理が生じるが、５章(21)の代表値関数下として、多項演算を直接考慮すればよい。

６章でとりあげた差分比較行列Ｂを対象とするならば、(44)、(45)において一般化乗算⊗は通常の加算＋となる。

$$B \boxtimes x = \lambda \boxtimes x \qquad (44)$$

$$x(t+1) = B \boxtimes x(t) \qquad (45)$$

一般化加算⊕としては、率比較行列Ａと同様に「最大値演算ＭＡＸ」あるいは「最小値演算ＭＩＮ」が代表的であろう。ここで、(44)を要素毎に記述すると(46)となる。

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n}\oplus\left(b_{kj}\otimes x_j\right)=\lambda\otimes x_k \qquad (46)$$

⊗＝＋とすると、(46)は(47)となり、２章(4)の動的プロセスとしての固有値・ベクトルの意味づけ「x(t+1)は要素毎に一律に x(t)のλ倍」ではなく、「x(t+1)は要素毎に一律に x(t)にλ加算」となる。

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n}\oplus\left(b_{kj}+x_j\right)=\lambda+x_k \qquad (47)$$

8.　おわりに

パス代数Ｐ(⊕,⊗)下の<u>逆行列問題</u>$x = A \boxtimes x + I$については、反復過程$x(t+1) = A \boxtimes x(t) + I$, x(0)=I が付随し、直接的あるいは形式的に$x=(I-A)^{-1}=\Sigma A^k$ となることなどにより、最短路問題、最大容量路問題、などネットワーク上の経路問題のとの密接な関係が議論されてきた(例えば、[1]、[2]など)。

本論文においては、パス代数Ｐ(⊕,⊗)下の<u>**固有値問題**</u>$A \boxtimes x = \lambda \boxtimes x$には反復過程$x(t+1) = A \boxtimes x(t)$が付随することを示し、一対比較行列にもとづく項目のウエイト決定プロセスの立場から、固有値問題$A \boxtimes x = \lambda \boxtimes x$を考察し、最大値演算ＭＡＸは楽観的判断を、最小値演算ＭＩＮは悲観的判断を表現している事を示した。これにより、パス代数下の固有値問題の解釈が可能になった。

参考文献

〔１〕篠原正明：回路網諸問題への掃き出し系算法の適用、日本オペレーションズリサーチ学会 1974 年度春季研究論文集、2-2-6, pp. 85-86 (1974. 4).

〔２〕篠原正明：パス代数、日本大学生産工学研究科・大学院講義ノート、第 15 章（2000).