

非線形計画法におけるKKT条件・強相補性定理の幾何学

日大生産工

○篠原 正明

計量計画研究所

茂木 渉

1. はじめに

非線形計画法 (NLP) におけるKarush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件の相補性条件において, 強相補性条件を満たす解が必ず存在することを主張する「NLPの強相補性定理」について考察する. 線形計画法 (LP) では「強相補性定理」が必ず成立するが, 果たしてNLPではそれが常に成立するかを調べるのが本論文の目的である. 強相補性が顕著となる例題を通して, LPならびにNLPに共通した「強相補性定理」の幾何学的構造を分析する.

NLPにおいても双対退化が発生している問題では, LPと同様に非自明な強相補性最適解が存在し, 従って, 強相補性定理が成立することが予想できる. しかし, NLPの非線形性ゆえに, LPとは異なり強相補性定理は必ずしも成立しないことを, 例題を通して説明する.

2. KKT条件

非線形計画問題(1),(2)の1次の最適性条件であるKKT条件あるいはKuhn-Tucker条件は, (3)~(6)で与えられる.

[非線形計画問題]

目的関数 : $z = f(\mathbf{x}) \rightarrow \text{最小化}$ (1)

制約条件 : $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ (2)

[KKT条件]

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \left(= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right) = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \left(= \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right) \leq \mathbf{0} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \quad (6)$$

但し, ラグランジュ関数 $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ は(7)で与える.

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (7)$$

3. 双対退化問題において強相補性解が非自明となる例題

例3.1に示すように, 双対退化LP問題では非自明な強相補最適解を見出すことができる. 同様に, 例3.2, 例3.3に示す双対退化NLP問題でも非自明な強相補最適解が存在することを説明する.

[例3.1] 双対退化LP

文献[1]の [例4] を考えよう.

$$\text{LP : } z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \quad (8)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 1 \quad (9)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 1 \quad (10)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (11)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (12)$$

図1の図的解釈において, 基底解 I と基底解 II においては, 弱相補性は成立しているが, 強相補性は不成立である. 端点 I と端点 II を結ぶ辺上においては両端点を除いて, 強相補性が成立している. 端点 I では, (9)と(10)が等号成立 (活性) なので, スラック $x_3 = 0, x_4 = 0$ である. 対応する双対変数 y_1, y_2 は正が期待されるが, 「 $y_1 = 0, y_2 = 0$ 」と $y_2 = 0$ である. すなわち, y_2 に対応する制約(10)の定数項微小変動に対する目的関数増分が0と言える. 同様に, 端点 II では, (9)と(12)が活性なので, $x_2 = 0, x_3 = 0$ である. 対応する双対変数は「 $y_4 = 0, y_1 = 0$ 」と $y_4 = 0$ である. すなわち, y_4 に対応する制約(12)の定数項微小変動に対する目的関数変化分が0と言

える（なお、ラグランジュ定数あるいは双対変数の意味付けについては、文献[2]の雑談4.6を参照のこと）。

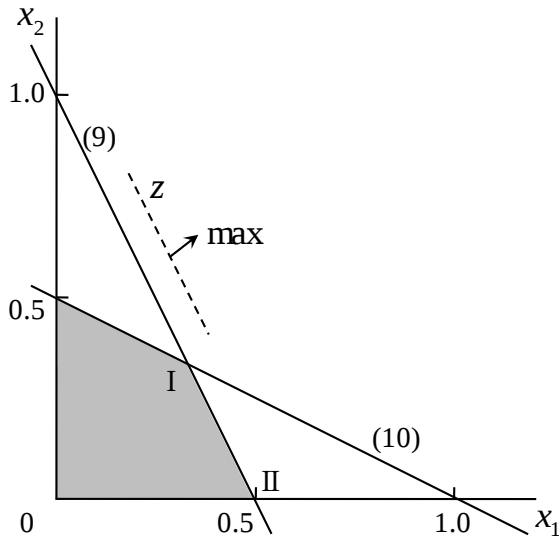


図1 例3.1の図解

すなわち、特別なNLPとみなせるLP問題において、双対退化の様に目的関数の等高線（の1つと）制約条件式が一致する場合に、端点解では強相補性が不成立で、それらの強凸結合解において強相補性が成立することがわかる。同様なことがNLPについても言える（例3.2, 例3.3参照）。 [例3.1終り]

【例3.2】 双対退化NLP（その1）

$$\text{NLP1 : } z = x^2 + y^2 \rightarrow \max \quad (13)$$

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad (14)$$

$$x \geq 0 \quad (15)$$

$$y \geq 0 \quad (16)$$

(14),(15),(16)に対応する未定乗数を λ, μ, ν として、ラグランジュ関数を(17)で与え、KKT条件を満たす解を求めると、(18)となる。

$$L(x, y; \lambda, \mu, \nu) = -(x^2 + y^2) - \lambda(1 - (x^2 + y^2)) - \mu x - \nu y \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \text{「}\lambda = 1, \mu = 0, \nu = 0, x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\text{」} \\ & \quad (18) \end{aligned}$$

(18)は以下の3つのケース(19), (20), (21)に分けることができる。

$$\text{「}\lambda = 1, \mu = 0, \nu = 0, x = 0, y = 1\text{」 (交点 I) (19)}$$

$$\text{「}\lambda = 1, \mu = 0, \nu = 0, x = 1, y = 0\text{」 (交点 II) (20)}$$

$$\begin{aligned} & \text{「}\lambda = 1, \mu = 0, \nu = 0, x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\text{」} \\ & \quad (21) \end{aligned}$$

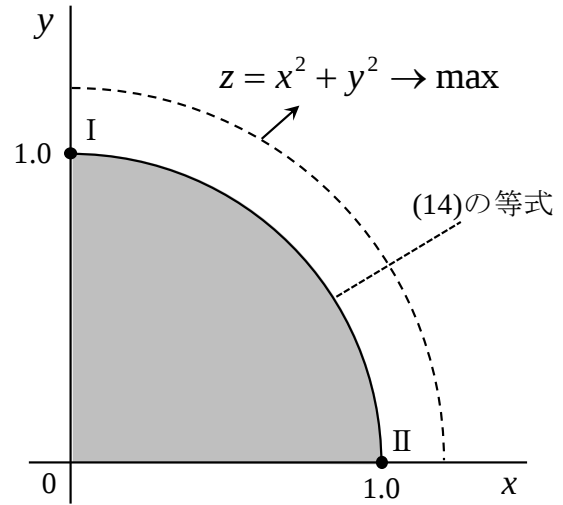


図2 例3.2の図解

ここで、(19),(20)では弱相補性は成立しているが、強相補性は不成立である。一方、(21)は強相補性が成立している。交点 I において、(15)式は活性であるが、対応する双対変数 $\mu = 0$ であり、(15)式の対定数項変動・目的関数変動効果は零と言える。同様に、交点 II において、(16)の対定数項変動・目的関数変動効果は零である。 [例3.2終り]

【例3.3】 双対退化NLP（その2）

$$\text{NLP2 : } z = x^2 + y^2 \rightarrow \max \quad (22)$$

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad (23)$$

$$x + y^2 \geq 0 \quad (24)$$

$$y \geq 0 \quad (25)$$

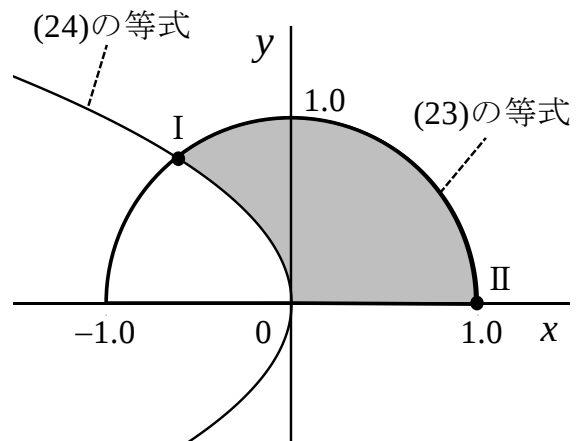


図3 例3.3の図解

KKT解として、以下の(26)~(28)を得る.

$$\lambda=1, \mu=0, \nu=0,$$

$$x=(1-\sqrt{5})/2, y=\sqrt{(1-\sqrt{5})}/2 \quad (26)$$

$$\lambda=1, \mu=0, \nu=0, x=1, y=0 \quad (27)$$

$$\lambda=1, \mu=0, \nu=0, x^2+y^2=1, x+y^2>0, y>0 \quad (28)$$

ここで、(26),(27)では強相補性不成立だが、(28)では成立している. [例3.3終り]

4. 双対退化問題の強相補最適解についての考察

(4.1) LPでもNLPでも双対退化が生じているケースでは、点ではなく辺や面（一般には超平面）において最適解が達成され、その超平面の縁においては他の制約が活性化しているものの、その活性制約の対定数項・目的関数変動効果は零であり、従って、対応するラグランジュ乗数=0となり、強相補性が不成立となる. このようなケースでも、縁を除いた双対退化面上では双対退化面を規定する制約式は活性であり、対応するラグランジュ乗数 $\neq 0$ となり、強相補性が成立している.

(4.2) LPの（さらにはNLPでも成立するとすればその）強相補性定理の主張する点は、…「最適解の中には、活性制約に対応する双対変数（あるいはラグランジュ乗数）が正となる解が必ず存在する」、さらに、「活性制約の微少変動に対して最適値も変化する最適解が存在する」、とも言える.

(4.3) 双対退化NLPにおいて強相補性定理が成立するか？については、以上の考察により、NLP最適解での線形近似を考えれば、LPと同様の議論により証明できると予想する. 但し、その際に線形近似が可能となる制約想定などの前提は仮定する必要があると思われる.

(4.4) 大雑把に言うならば、LPならびにNLPの強相補性最適解の存在性定理は、寄与的(contributive)活性制約式のみからなる最適解が存在することを主張している. ここで、「寄与的」とは、注目する制約式の変動が目的関数値に寄与する、極端な言い方をすれば、制約式が無くても目的関数値

が不変ということがないことを言う. 逆の場合として、活性制約式がすべて非寄与的な場合が、NLPにおける「制約想定違反」に対応し、LPではそのような事態は想定する必要がない(制約想定については、[2]雑談4.9を参照のこと).

5. NLPにおいて強相補性定理が成立しない例

前3,4章においては、双対退化NLPにおいてLPと同様に非自明な強相補解が存在することを考察した.

本考察より推察すると、LPと同様にあらゆるNLPにおいて強相補最適解が存在することが予想されるが、実際には以下に示す反例5.1, 5.2により、「NLPにおいて必ず強相補最適解が存在する」とは言えない.

【例5.1】 強相補最適解が存在しないNLP (その1)

$$\text{NLP3} \quad : \quad z = x \rightarrow \min \quad (29)$$

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad (30)$$

$$y \geq 0 \quad (31)$$

KKT解として、以下の(32)を得る.

$$x=-1, y=0, \lambda=0.5, \mu=0 \quad (32)$$

「 $x=-1, y=0$ 」においては、(30)は $x^2+y^2=1$ 、(31)は $y=0$ となり、いずれも活性制約であるが、(31)に対応する未定乗数 $\mu=0$ で、(31)は不寄与・活性である(30)は寄与・活性. すなわち強相補最適解は存在しない. [例5.1終り]

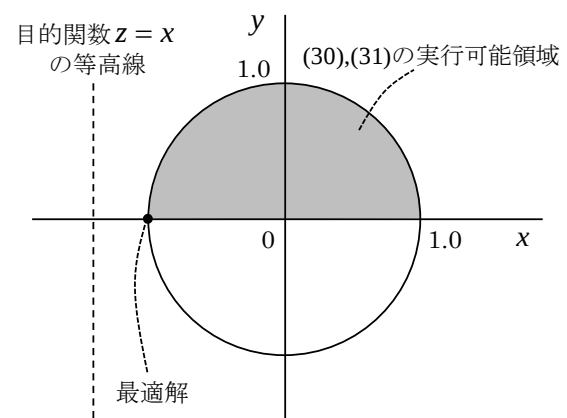


図4 例5.1の図解

次に、より単純な一変数NLPの例を示す。

[例5.2] 強相補最適解が存在しないNLP (その2)

$$\text{NLP4 : } z = x^2 \rightarrow \min \quad (33)$$

$$x \geq 0 \quad (34)$$

KKT解として、以下の(35)を得る。

$$x = 0, \lambda = 0 \quad (35)$$

$x = 0$ では、(34)は $x = 0$ となり、(34)は活性であるが、 $\lambda = 0$ なので、不寄与・活性制約式となる。すなわち、強相補最適解は存在しない。 [例5.2終り]

6. 強相補最適解の幾何

前5章で示した反例5.1, 5.2より、NLPでは必ずしも強相補最適解が存在するとは限らないことがわかる。いずれの場合でも、乗数=0の不寄与制約式が活性化している。

双対退化LPの場合、双対退化NLPの場合、不寄与・活性制約の場合（5章の例）を図5に整理する。図5において、太線表示が強相補解で、○印は強相補解ではない。

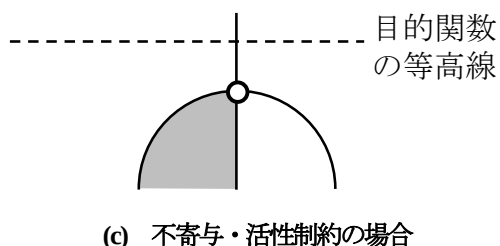
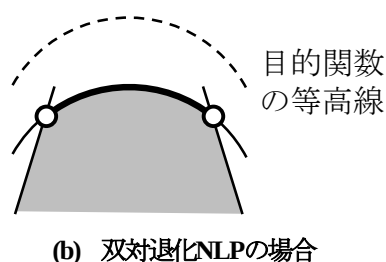
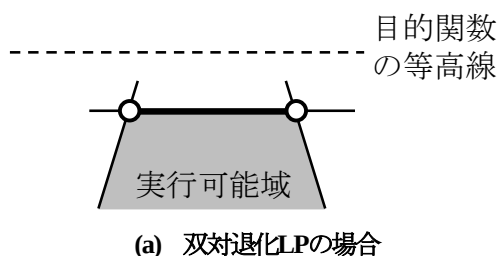


図5 強相補最適解の幾何

7. NLPにおいて強相補最適解を構成する方法

現実の設計問題などでは、最適解においては活性制約式がすべて寄与的であることが望まれる場合がある。最適解なので、それを決定している制約式群に対応する双対変数(潜在価値)は正、すなわち、その中に非寄与的な制約式が存在することを不都合とする考え方である。

このような状況下において、強相補最適解を求めるアプローチを以下に提案する。

- (i) 双対退化NLPの場合：「縁」の解が得られた時には、「縁」以外の内点を求める。
- (ii) 双対退化NLPでない場合：不寄与・活性制約式を同定した時点で、その制約を削除した新しいNLPを再構成し、新NLPの強相補最適解を求める。例5.1では(31)を削除した新NLP、例5.2では(34)を削除した新NLPを新たな検討対象の問題として考える。すなわち、不寄与・活性制約式を問題検討の時点で考慮しないことにより、強相補最適解を求める。なお、これら不寄与・活性制約式は、これらを削除することで問題の実行可能域が減少するので、冗長制約式ではない。

8. おわりに

LPでは「強相補性定理」が必ず成立するが、NLPでは「強相補性定理」は必ずしも成立しないことを示した。なお、「強相補性定理」は、注目解において、活性制約式がすべて寄与的である、即ち、その微小変動に対して目的関数値が変化する、を意味しており、現実の設計問題などでは望まれる特性でもある。そこで、任意のNLPで「強相補性解」を構築するアプローチについても示した。

参考文献

- [1] 篠原正明, 篠原健: 対基底の理論と応用 (その1) —強相補性—, 第41回日本大学生産工学部 学術講演会 数理情報部会 講演概要(2008.12).
- [2] 篠原正明: エクセル・数理計画法, 学部授業教材 (2011).