

遊戯ゲームの情報構造と数理分析

－（その4）nすくみ巡回ジャンケンポンゲームの提案－

日大生産工

○篠原 正明

情報システム研究所

篠原 健

1. はじめに

グー（石, stone）、チョキ（はさみ, scissors）、パー（紙, paper）に代表されるジャンケンポンゲームを（非協力）零和対称型2人ゲームの視点から考察する。本論文では $n=3$ の場合に相当するジャンケンポンゲームを n の場合に一般化した「 n すくみ巡回ゲーム」を提案し、その均衡戦略を分析する。

2. 零和2人ゲームとしての n すくみ巡回ゲーム

ジャンケンポンゲームでは本来は2人に限られず2人以上のプレイヤーが参加可能であるが、本論文では最大化プレイヤーと最小化プレイヤーの間での零和ゲームとして以下に一般的にモデル化する。

$x = \{x_i\}$: 最大化プレイヤーの戦略確率（列）ベクトル（ $n \times 1$ ）、 x_i は戦略 i を採用する確率。

$y = \{y_i\}$: 最小化プレイヤーの戦略確率（列）ベクトル（ $n \times 1$ ）、 y_i は戦略 i を採用する確率。

$A = \{a_{ij}\}$: 最大化プレイヤーにとっての利得行列（ $n \times n$ ）＝最小化プレイヤーにとって損失行列（ $n \times n$ ）、 a_{ij} は最大化プレイヤーが戦略 i 、最小化プレイヤーが戦略 j を採用した時の最大化プレイヤーの利得（あるいは、最小化プレイヤーの損失）。

[例1： $n=3$ の場合の利得行列]

各プレイヤーの戦略1をグー、戦略2をチョキ、戦略3をパーとするならば、利得行列 A は（1）式で与えられる。

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{グー} & \text{チョキ} & \text{パー} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{グー} \\ \text{チョキ} \\ \text{パー} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{32} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

ここで、（1，2）要素で a_{12} は最大化プレイヤーがグー（戦略1）、最小化プレイヤーがチョキ（戦略2）を採用した時の最大化プレイヤーの利得（＝最小化プレイヤーの損失）であり、通常は石は鋏に勝つので $a_{12} > 0$ である。（2，1）要素は最大化プレイヤーが逆の立場になるので、 $-a_{12}$ が最大化プレイヤーの利得（ a_{12} の損失）となる。

同様に、 $a_{23} > 0$ 、 $a_{31} > 0$ と仮定する。

[例2：一般の n の場合の利得行列]

各プレイヤーは n 個の戦略 $\{1, 2, \dots, n\}$ を持ち、最大化プレイヤーが戦略 i 、最小化プレイヤーが戦略 $i+1$ を採用した時に、最大化プレイヤーは利得 $a_{i, i+1} (> 0)$ を得、同時に最小化プレイヤーは同額を損失する（ $i=1, 2, \dots, n \text{ で } \text{mod } n$ ）。又、最大化プレイヤーが戦略 $i+1$ 、最小化プレイヤーが戦略 i を採用した時に、最大化プレイヤーは利得 $-a_{i, i+1}$ を得る（ $a_{i, i+1}$ の損失）。最小化プレイヤーは $a_{i, i+1} (> 0)$ の利得を得る（ $i=1, 2, \dots, n \text{ で } \text{mod } n$ ）。その他の戦略対では両社の利得は零である（相子）。

表記を単純化して、 $a_{i, i+1} = a_i$ とすれば、利得行列 A は（2）式で与えられる。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ -a_1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{n-1} & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$n=4$ では (3) 式、 $n=5$ では (4) 式となる。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & -a_4 \\ -a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & -a_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & -a_5 \\ -a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 & a_4 \\ a_5 & 0 & 0 & -a_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

3. n 人巡回ゲームの最適戦略の諸性質

(2) 式の A を最大化プレイヤーの利得行列とするならば、最小化プレイヤーの利得行列は $-A$ で与えられる。又、両プレイヤーは対等であり、 $A = -A^T$ が成立する。すなわち、最小化プレイヤーの利得行列は $-A = A^T$ となる。このような零和ゲームを零和対称ゲームと言う。零和対称ゲームでは最適戦略に関して以下の性質 1, 2, 3 が成立する。

性質 1 最大化プレイヤーの利得を最大化し、最小化プレイヤーの損失を最小化する各最適戦略ベクトル対を (x^*, y^*) とするならば、 $x^* = y^*$ (5)。

性質 2 最大化プレイヤーの最大利得値を U^* 、最小化プレイヤーの最小損失値を V^* とするならば、 $U^* = V^* = 0$ (6)。

性質 3 最適戦略ベクトル x^* は、(7) の同次方程式を満たす。

$$Ax^* = 0 \quad (7)$$

ここで、性質 1 は「最適戦略の対称性」、性質 2 は「零のゲーム値」、性質 3 は「対個別戦略零期待値条件」である。以下に性質 3 の「対個別戦略零期待値条件」を補足説明する。

最大化プレイヤーが任意の戦略 x 、最小化プレイヤーが任意の戦略 y を採用した時の最大化プレイヤーの期待利得を U 、最小化プレイヤーの期待損失を V とするならば、一般に (8)、(9) 式が成立する。

$$U = x^T A y \quad (8)$$

$$V = -x^T A y \quad (9)$$

特に最適戦略 x^*, y^* では、性質 1, 2 より、(10) 式あるいは (11) 式(すなわち、性質 3) が成立する。これを以下に説明する。

$$Ax^* = 0 \quad (10)$$

$$x^{*T} A = 0^T \quad (11)$$

ところで、(11) 式の条件は (10) 式の条件と等価であり、(8) 式より、 $x^{*T} A$ は最大化プレイヤーが最適戦略 x^* を採用した時に、最小化プレイヤーの戦略別の期待利得ベクトル u の転置を表わす。

$$U = (x^{*T} A) y = u^T y \quad (12)$$

$$u^T = x^{*T} A \quad (13)$$

$$u = A^T x^* = -Ax^* \quad (14)$$

$u = \{u_i\}$: u_i は最大化プレイヤーが最適戦略 x^* を採用、最小化プレイヤーが戦略 i (y_i) を採用した時の最大化プレイヤーの期待利得である。

$$u_i = x^{*T} A e_i = u^T e_i \quad (15)$$

但し、 e_i は 第 i 要素が 1 でそれ以外は 0 の列ベクトル。

性質 2 より $U^* = 0$ なので、 $u_i = 0$ となることが要求される。なぜなら、 $u_i > 0$ ならば最大化プレイヤーは自

分の戦略 i の採用確率 x_i^* を増加することにより、最

大利得値 U^* を増加でき、 $u_i < 0$ ならば x_i^* を減少す

ることにより $\mathbf{U}^*$ を減少できる。いずれの仮定 ($\mathbf{u}_i > 0$ と $\mathbf{u}_i < 0$) も最適戦略 $\mathbf{x}^*$ の仮定に反する。 よって、 $\mathbf{u}_i = 0$ 、すなわち、 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (16) 式が成立する。

4. 奇数 n すくみの巡回ゲームの最適戦略の導出
性質3の対個別戦略零期待値条件 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ にもとづき、以下に $n=3$ 、 $n=5$ 、 $n=\text{奇数}$ の場合について最適戦略を導出する。

[例3 : $n=3$ の場合の最適戦略]

$|A| = 0$ であり、同次方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ は非自明解を持つ。(17) 式の正規化条件を付与すれば、(18) の最適戦略を得る。

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1^* = y_1^* &= \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3} \\ x_2^* = y_2^* &= \frac{a_3}{a_1 + a_2 + a_3} \\ x_3^* = y_3^* &= \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

[例4 : $n=5$ の場合の最適戦略]

$|A| = 0$ であり、同次方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ は非自明解を持つ。
正規化条件を付与すれば、(19) の最適戦略を得る。

$$\left. \begin{aligned} x_1^* = y_1^* &= \frac{a_2 a_4}{a_2 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_1 + a_5 a_2 + a_1 a_3} \\ x_2^* = y_2^* &= \frac{a_3 a_5}{a_2 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_1 + a_5 a_2 + a_1 a_3} \\ x_3^* = y_3^* &= \frac{a_4 a_1}{a_2 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_1 + a_5 a_2 + a_1 a_3} \\ x_4^* = y_4^* &= \frac{a_5 a_2}{a_2 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_1 + a_5 a_2 + a_1 a_3} \\ x_5^* = y_5^* &= \frac{a_1 a_3}{a_2 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_1 + a_5 a_2 + a_1 a_3} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

[例5 : $n=2m+1$ (奇数) の場合の最適戦略]

$|A| = 0$ であり、同次方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ は非自明解を持つ。正規化条件を付与すれば、(20) の最適戦略を得る。

$$x_i^* = y_i^* = \frac{a_{i+1} \cdot a_{i+3} \cdot \dots \cdot a_{i+2m-1}}{\sum_{j=1}^n a_{j+1} \cdot a_{j+3} \cdot \dots \cdot a_{j+2m-1}} \\ = \frac{\prod_{k=1}^m a_{i+2k-1}}{\sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^m a_{j+2k-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(20)

但し、(20) 式において、分母、分子の各項は利得値 a の m 個の積であり、添字は $\text{mod } n$ とする。

(20) 式は例3、例4の(18)式、(19)式を含んだ一般式であり、例えば、 $n=7$ ($m=3$) とすれば、 $x_1^* = y_1^*$ は(21)式で与えられる。

$$x_1^* = y_1^* = \frac{a_2 a_4 a_6}{a_2 a_4 a_6 + a_3 a_5 a_7 + a_4 a_6 a_1 + a_5 a_7 a_2 + a_6 a_1 a_3 + a_7 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_5} \quad (21)$$

なお、 $\mathbf{Ax}$ の第 i 要素は(2)において、第 i 行第 $i+1$ 列 $a_i(x_{i+1}^*)$ 、第 i 行第 $i-1$ 列 $-a_{i-1}(x_{i-1}^*)$ なので、(20)式の分子のみを代入すると、 $a_{i+2m} = a_{i-1} (\text{mod } n)$ なので(22)となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} \text{ の第 } i \text{ 要素相当} &= a_i x_{i+1}^* - a_{i-1} x_{i-1}^* \\ &= a_i (a_{i+2} a_{i+4} \cdot \dots \cdot a_{i+2m}) - a_{i-1} (a_i a_{i+2} \cdot \dots \cdot a_{i+2m-2}) \\ &= (a_{i+2m} - a_{i-1}) (a_i a_{i+2} a_{i+4} \cdot \dots \cdot a_{i+2m-2}) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

なお、このことから、非自明解(20)を持つことが確認できた。

5. 4すくみ巡回ゲームの最適戦略

(3) 式の利得行列 A の行列式 $|A|$ は(23)式で与えられる。

$$\begin{aligned} |A| &= a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_4^2 + 2a_1 a_2 a_3 a_4 \\ &= (a_1 a_3 - a_2 a_4)^2 \end{aligned} \quad (23)$$

さらに、 $\{x_1, x_3\}$ と $\{x_2, x_4\}$ を各々部分集合として、同次方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ の変数を再配置すると、(24) 式の同次方程式 $\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ を得る。

$$\begin{pmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & -a_4 \\ 0 & 0 & -a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$|A|=0$ (あるいは $|A'|=0$) の場合 ($a_1 a_3 = a_2 a_4$) には、同次方程式 $Ax = 0$ (あるいは $A'x' = 0$) は非自明解を持ち、2つのパラメタ λ 、 μ を用いて以下で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x_1^* &= \lambda \\ x_2^* &= \mu \\ x_3^* &= \frac{a_1}{a_2} \lambda \\ x_4^* &= \frac{a_2}{a_3} \mu \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

(26) の正規化条件を導入すると、1つのパラメタ λ を用いた (27) 式を得る。

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda \\ x_3 &= \frac{a_1}{a_2} \lambda \\ x_2 &= \left\{ 1 - \lambda \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \right) \right\} \cdot \frac{a_2}{a_2 + a_3} \\ x_4 &= \left\{ 1 - \lambda \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \right) \right\} \cdot \frac{a_2}{a_2 + a_3} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

但し、 λ は (28) 式の範囲に限定される。

$$0 \leq \lambda \leq \frac{a_2}{a_1 + a_2} \quad (28)$$

次に $|A| \neq 0$ (あるいは $|A'| \neq 0$) の場合 ($a_1 a_3 \neq a_2 a_4$) について考察する。

線形代数の理論に従えば、同次方程式 $Ax = 0$ の係数行列 A の行列式が非零ならば、自明解 $x = 0$ 以外の解は存在しない。しかし、4すくみ巡回ゲームとしては $a_1 a_3 \neq a_2 a_4$ の場合は当然存在する。又、文献[1]等のゲームシミュレーションでも

$a_1 a_3 \neq a_2 a_4$ の条件下において均衡解を近似的に得ることができる。文献[1]のシミュレーション結果をもとに、この場合の解を以下に推察する。

$$\left. \begin{aligned} [a_1 a_3 > a_2 a_4 \text{ の場合}] \\ x_2 &= x_4 = 0 \\ x_1 &= \frac{a_2}{a_1 + a_2} \text{ (あるいは } \frac{a_3}{a_3 + a_4} \text{)} \\ x_3 &= \frac{a_3}{a_1 + a_2} \text{ (あるいは } \frac{a_4}{a_3 + a_4} \text{)} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} [a_1 a_3 < a_2 a_4 \text{ の場合}] \\ x_1 &= x_3 = 0 \\ x_2 &= \frac{a_4}{a_1 + a_4} \text{ (あるいは } \frac{a_3}{a_2 + a_3} \text{)} \\ x_4 &= \frac{a_1}{a_1 + a_4} \text{ (あるいは } \frac{a_2}{a_2 + a_3} \text{)} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

6. おわりに

石>鉄>紙>石のように戦略間支配関係(あるいは強弱関係)が巡回的なすくみ (cyclic dominance) を構成する2人零和対称ゲームの均衡分析を行った。巡回的な強弱関係としては、

「ねずみ>壁>風>雲>太陽>人間>犬>猫」、

「社長>部長>課長>平社員=消費者>社長」、

など自然界あるいは社会組織において多く観察される。じゃんけんのようなゲームでは各均衡戦略確率はミニマキシ戦略に基づき各プレイヤーがゲームに負けないためにランダムに手を出す際の混合戦略確率であるが、自然界あるいは社会組織におけるすくみ構造の関係として考えると、各均衡戦略確率は各要素(例えば、ねずみ、社長、など)の均衡分布確率あるいは重要度などと解釈できる。

巡回的な支配関係が唯一のサイクルからなる場合に注目して、奇数サイクル長の場合について均衡解の一般解を導出した。偶数サイクル長、唯一サイクル以外、などの場合の均衡分析は今後の課題である。

参考文献

- [1] 小川元喜：「三すくみと四すくみじゃんけんゲームの均衡分析」、平成21年度 日本大学生産工学部 数理工学 卒業研究論文(2010. 2)
- [2] 福永智史：「ゲーム理論を用いたじゃんけん最適戦略」、平成21年度 日本大学生産工学部 数理工学 卒業研究論文(2010. 2)