

評価平均モデルにもとづく AHP 固有ベクトルの動特性

日大生産工(院) ○金成 賢作
日大生産工 篠原 正明

1. はじめに

人間は意思決定を行う際、幾度となく思考を巡らせ、十分に熟慮した上で決断を下す。本研究は熟慮する事で得られる『結果』に対してではなく、寧ろその結果が得られるまでの『過程』について考察を行う。人間が思考を巡らせる過程は、数学分野での反復法 (Iterative Method) に置き換えられる。詰まり、我々が“頭の中で考えを巡らせる”という行動は何らかの計算問題を繰り返し解く事と同じであり、“計算問題を反復法により解く”という処理に置換できる。

人間が意思決定を行う際に迷うことがあるように、反復法による解の算出も、時に多くの反復回数を必要とする。本研究では、AHP における一対比較行列から項目毎の評価ウェイトを推定する際、反復回数を経て次第に解が収束する様子を動特性 (Dynamic Process) と捉え、様々な入力データに対して考察を行う。

2. 評価平均モデル

本研究では、評価平均モデルに対して反復法を適用し、解が収束するまでの過程を観察する。固有値問題 (Eigenvalue Problem) の場合は図 1 のように、項目 k の評価ウェイト w_k を、相対比較値 $a_{kj}w_j$ への合計操作を経て算出する。 a_{kj} とは項目 k の相対比較集合 S_k に属する項目 $j \in S_k$ との一対比較値である。

固有値問題に対して評価平均モデルの場合は、図 2 のように評価ウェイト w_k を相対比較値 $a_{kj}w_j$ に対する平均操作を経て算出する。ここで言う平均操作とは、算術平均・幾何平均・調和平均等を含めた一般化平均 (Generalized Mean) のみならず、中央値・最頻値などの代表値操作を考える。尚、本研究では、算術平均による評価平均モデルを使用した。

【Eigenvalue Problem】

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t-1) \\ w_2(t-1) \\ w_3(t-1) \\ w_4(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{bmatrix}$$

↓

$$a_{k1}w_1(t-1) + \dots + a_{k4}w_4(t-1) = w_k(t)$$

$$\sum_{j=1}^4 a_{kj}w_j(t-1) = w_k(t)$$

Figure 1: Eigenvalue Problem

【Arithmetic Mean】

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t-1) \\ w_2(t-1) \\ w_3(t-1) \\ w_4(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{bmatrix}$$

↓

$$\frac{1}{4} \{a_{k1}w_1(t-1) + \dots + a_{k4}w_4(t-1)\} = w_k(t)$$

$$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 a_{kj}w_j(t-1) = w_k(t)$$

Figure 2: Averaging Mutual Evaluation Values

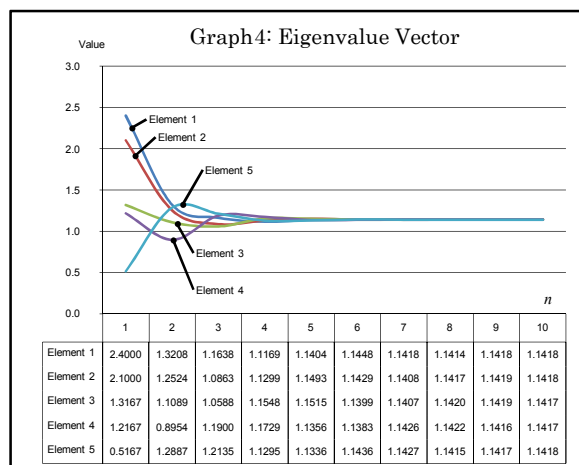
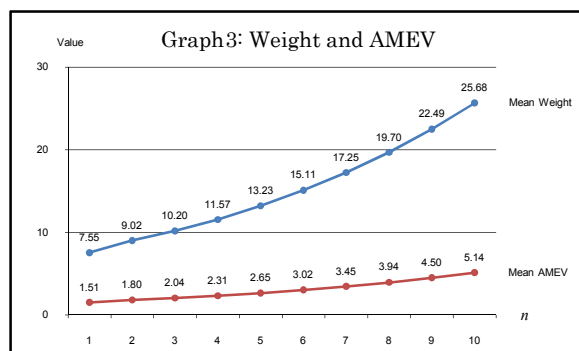
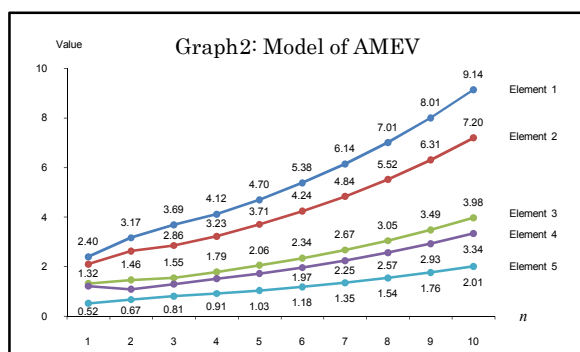
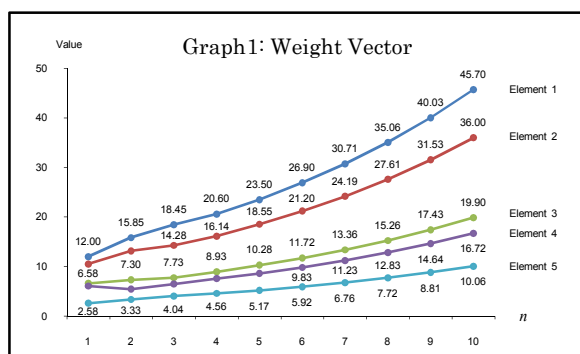
3. 動特性の考察

入力データとして合計 8 種類の正方行列を用意した。5 次正方行列として整合性 (Consistency Index) の有無により 2 種類・全要素 $a_{kj}=2$ ・全要素 $a_{kj}=2, a_{kk}=1$ の合計 4 種類の行列を用意した。同様に、10 次正方行列に関しても合計 4 種類の行列を用意した。各入力データに対する計算過程を次頁に掲載する。

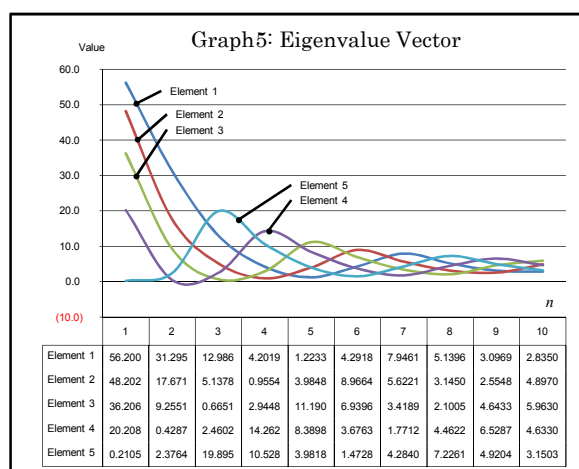
3.1 5 次正方行列 (整合性なし)

入力データとして 5 次正方行列 (整合性なし) を与えた場合を考える。動特性を Graph 1~4 として整理し、以下に掲載する。Graph 1 から、固有値問題による評価ウェイト $w_k (k=1,2,\dots,5)$ は反復回数を経るに連れ、次第に増加することが分かる。Graph 2 から評価平均モデルにおいても評価ウェイトが次第に増加することが分かる。固有値問題による評価ウェイトの各要素は、評価平均モデルの場合に比べ、値が約 5 倍 (5=項目数) になっている。固有値問題による評価ウェイトと、評価平均モデルによる評価ウェイトを比較したものが Graph 3 である。固有値問題・評価平均モデルともに、評価ウェイトを構成する全要素の算術平均値を算出し、Graph を作成した。

固有値ベクトルの各要素を Graph で表現した物が、Graph 4 である。各要素の Graph は様々な形状をしているが、どの要素も最終的には約 1.1418 に収束している。尚、ここで言う固有値ベクトルとは、 t 時点での固有ベクトルの各要素と、 $t-1$ 時点での固有ベクトルの各要素の比率を、ベクトル表現した物である。

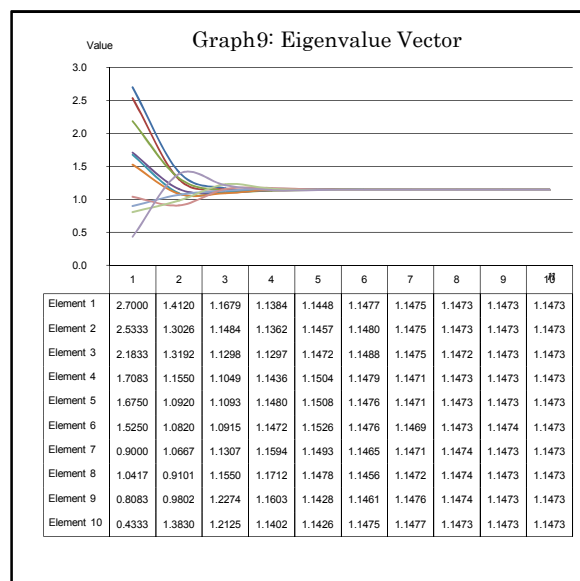
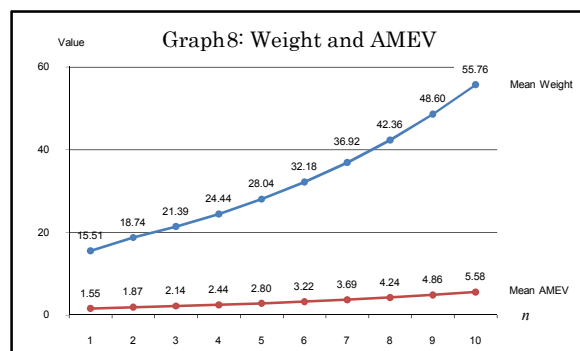
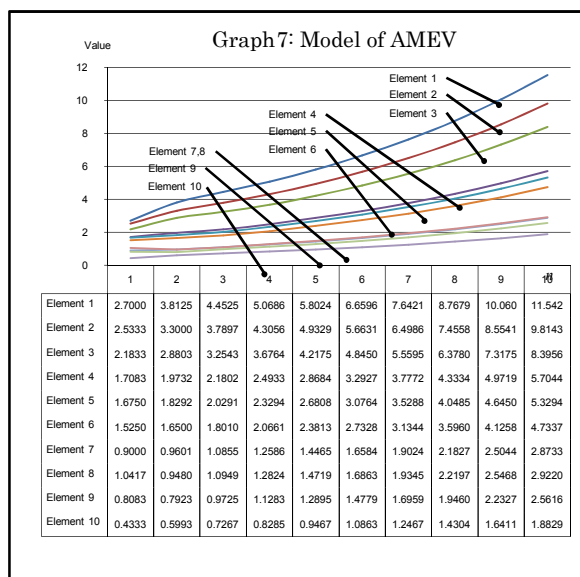
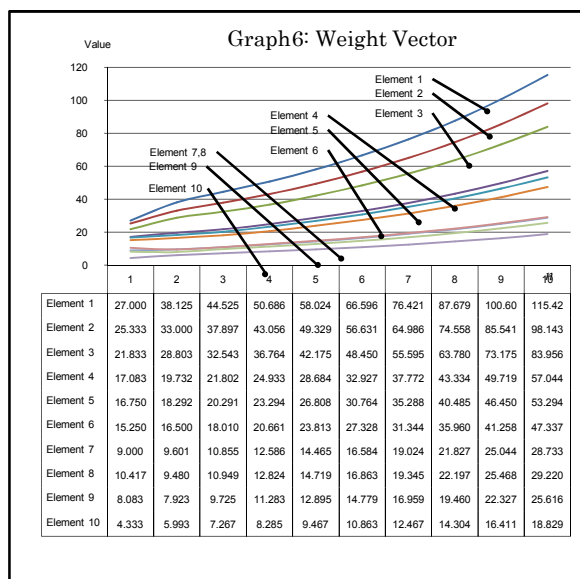


Graph 1~4 は、一対比較値 a_{kj} を 1/4 以上 4 以下の範囲で適当に割り当てた場合である。この結果に対し、一対比較値 a_{kj} を 1/100 以上 100 以下の範囲で割り当てた場合、動特性は Graph 5 のようになった。一対比較値 a_{kj} が取り得る値の範囲を広げたことで、固有値ベクトルの各要素が収束するまでに、より多くの反復回数を費やすようになった。



3.2 10 次正方行列 (整合性なし)

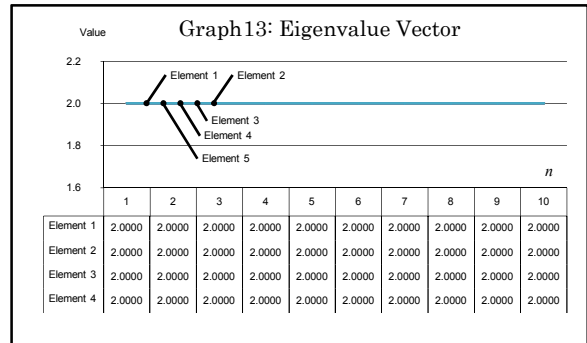
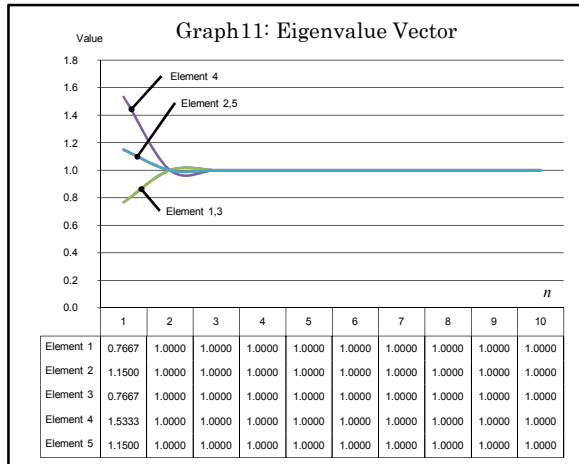
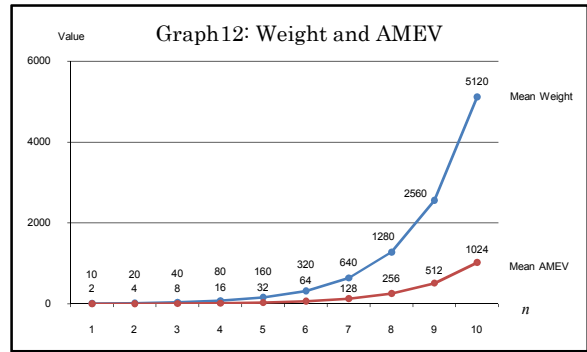
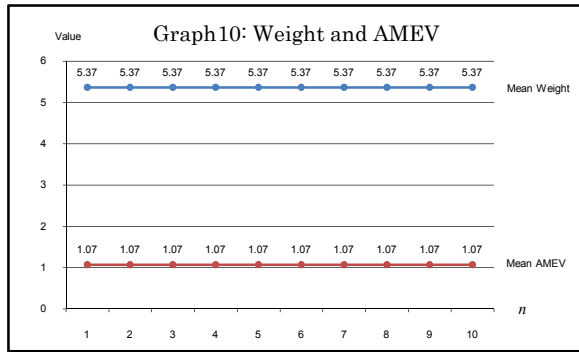
10 次正方行列 (整合性なし) を入力データとした場合を考える。動特性を Graph 6~9 として整理し、以下に掲載する。Graph 6,7 より固有値問題・評価平均モデルともに評価ウェイト $w_k (k=1,2,\dots,10)$ が次第に増加することが分かる。固有値問題による評価ウェイトと、評価平均モデルによる評価ウェイトを比較したものが Graph 8 である。固有値ベクトルの各要素を Graph で表現したものが Graph 9 である。最終的には約 1.1473 に収束している。



3.3 5 次正方行列 (整合性あり)

入力データとして 5 次正方行列 (整合性あり) を与えた場合を考える。固有値問題・評価平均モデルともに、評価ウェイト $w_k (k=1,2,\dots,5)$ を構成する全要素の算術平均値を算出し、Graph 10 を作成した。固有値問題・評価平均モデルともに評価ウェイトは一定の値を示しており、絶えず増加し続ける整合性なしの場合とは異なる結果になった。

また、固有値ベクトルの各要素を Graph として表現し Graph 11 を作成した。反復回数が 2 回に達した時点で瞬時に、全要素とも 1 に収束し、次第に値が収束する整合性なしの場合とは異なる結果になった。なお、入力データとして 10 次正方行列 (整合性あり) を与えた場合も、5 次正方行列とほぼ同じ結果が得られた。



3.4 5次正方行列(全要素 $a_{kj}=2$)

全ての一对比較値 a_{kj} が 2 の場合、詰まり全要素が 2 で構成される 5 次正方行列を入力データとした場合を考える。固有値問題・評価平均モデルともに評価ウェイト w_k を構成する全要素の算術平均値を算出し、Graph 12 を作成した。固有値問題による平均値は 10, 20, 40, 80, ... となり、評価平均モデルによる平均値は 2, 4, 8, 16, ... となった。両モデルとも規則的な変化を繰り返しつつ、値を増加させている事が分かる。なお、一对比較値が 3 の場合、評価平均モデルによる平均値は 3, 9, 27, 81, ... となり、一对比較値が 4 の場合、平均値は 4, 16, 64, 256, ... となる。但し、1 の場合、平均値は 1, 1, 1, 1, ... となる。

固有値ベクトルの各要素を Graph として表現し、Graph 13 を作成した。Graph 13 を見ると、反復回数が 1 回の時点で既に全要素とも 2 に収束している事が分かる。尚、入力データとして同様の条件下で 10 次正方行列を与えた場合も、5 次正方行列とほぼ同様の結果が得られた。

3.5 5次正方行列(全要素 $a_{kj}=2, a_{kk}=1$)

対角要素を 1、それ以外を 2 とした 5 次正方行列の場合を考える。固有値問題・評価平均モデルともに、評価ウェイトの全要素の算術平均値を基に Graph 14 を、固有値ベクトルの各要素を基に Graph 15 を作成した。尚、10 次正方行列でも、ほぼ同じ結果となった。

