7-52

DEA における入力指向と出力指向の比較(その 1)

日大生産工(院)　○金成　賢作
日大生産工　篠原　正明

1. はじめに

DEA(Data Envelopment Analysis)には入力指向(Input Oriented)と出力指向(Output Oriented)という 2 種類の考え方が存在する。入力値の改善に着目したものを入力指向、出力値の改善に着目したものを出力指向と呼ぶ。本研究では CCR Model (Charnes,Cooper and Rhodes Model)での入力指向と出力指向の比較、BCC Model (Banker ,Charnes and Cooper Model)での入力指向と出力指向の比較を行う。これにより、入力指向と出力指向の間にある関係性を考える。

本原稿では CCR Model(Input Oriented)を CCR-I、CCR Model (Output Oriented)を CCR-O と表記する。同様にして、BCC Model (Input Oriented)を BCC-I、BCC Model (Output Oriented)を BCC-O と表記する。

本研究は研究その 1 と研究その 2 に分かれている。その 1 では概要説明をした後、1 入力 1 出力データの例を説明する。研究その 2 では 2 入力 2 出力データの例を説明した後、研究全体についての考察を行う。

2. CCR Model の定式化

CCR Modelの主問題LP_oと双対問題DLP_oを図 1 として掲載する。式(2.7),(2.8)は出力値$\boldsymbol{y}_o$を維持しつつ入力値$\boldsymbol{x}_o$をできる限り縮小するというものだ。入力値の改善に着目していることから、このようなモデルを、入力指向モデルと呼ぶ。仮想入力/仮想出力の最小化定式化を考えると図 2 となる。式(2.16),(2.17)は入力値$\boldsymbol{x}_o$を維持しつつ出力値$\boldsymbol{y}_o$をできる限り拡大するというものだ。出力値の改善に着目していることから、このようなモデルを、出力指向モデルと呼ぶ。

≪LP_o-Input Oriented≫

$$\begin{aligned}
&\text{Objective:} && \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_o = z \to \max && (2.1)\\
&\text{Constrained:} && \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_o = 1 && (2.2)\\
& && -\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} \le \boldsymbol{0} && (2.3)\\
& && \boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{0} && (2.4)\\
& && \boldsymbol{v} \ge \boldsymbol{0} && (2.5)
\end{aligned}$$

⬇

≪DLP_o-Input Oriented≫

$$\begin{aligned}
&\text{Objective:} && w = \theta \to \min && (2.6)\\
&\text{Constrained:} && \mathrm{Y}\boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{y}_o && (2.7)\\
& && -\mathrm{X}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{x}_o\theta \ge \boldsymbol{0} && (2.8)\\
& && \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0} && (2.9)
\end{aligned}$$

Figure1: CCR-Input Oriented

≪LPO_o-Output Oriented≫

$$\begin{aligned}
&\text{Objective:} && \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_o = z \to \min && (2.10)\\
&\text{Constrained:} && \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_o = 1 && (2.11)\\
& && -\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} \le \boldsymbol{0} && (2.12)\\
& && \boldsymbol{p} \ge \boldsymbol{0} && (2.13)\\
& && \boldsymbol{q} \ge \boldsymbol{0} && (2.14)
\end{aligned}$$

⬇

≪$DLPO_o$-Output Oriented≫

$$\begin{aligned}
&\text{Objective:} && w = \eta \to \max && (2.15)\\
&\text{Constrained:} && \mathrm{X}\boldsymbol{\mu} \le \boldsymbol{x}_o && (2.16)\\
& && -\mathrm{Y}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{y}_o\eta \le \boldsymbol{0} && (2.17)\\
& && \boldsymbol{\mu} \ge \boldsymbol{0} && (2.18)
\end{aligned}$$

Figure2: CCR-Output Oriented

Comparison Between Input Oriented Model and Output Oriented Model of DEA -Part 1-

Kensaku KANARI and Masaaki SHINOHARA

3. BCC Model の定式化

BCC Modelの主問題LP$_o$と双対問題DLP$_o$を図3として掲載する。図3の各式は入力値の改善に着目しているため、入力指向モデルと呼ばれる。仮想入力/仮想出力の最小化定式化を考えると図4となる。出力値の改善に着目しているため、出力指向モデルと呼ばれる。

≪LP$_o$-Input Oriented≫

$$\text{Objective:} \quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_o - u_o = z \to \max \tag{3.1}$$
$$\text{Constrained:} \quad \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_o = 1 \tag{3.2}$$
$$-\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} \le u_o\boldsymbol{e} \tag{3.3}$$
$$\boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{0} \tag{3.4}$$
$$\boldsymbol{v} \ge \boldsymbol{0} \tag{3.5}$$

≪DLP$_o$-Input Oriented≫

$$\text{Objective:} \quad w = \theta \to \min \tag{3.6}$$
$$\text{Constrained:} \quad \mathrm{Y}\boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{y}_o \tag{3.7}$$
$$-\mathrm{X}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{x}_o\theta \ge \boldsymbol{0} \tag{3.8}$$
$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = 1 \tag{3.9}$$
$$\boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0} \tag{3.10}$$

Figure3: BCC-Input Oriented

≪LPO$_o$-Output Oriented≫

$$\text{Objective:} \quad \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_o - p_o = z \to \min \tag{3.11}$$
$$\text{Constrained:} \quad \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_o = 1 \tag{3.12}$$
$$-\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} \le p_o\boldsymbol{e} \tag{3.13}$$
$$\boldsymbol{p} \ge \boldsymbol{0} \tag{3.14}$$
$$\boldsymbol{q} \ge \boldsymbol{0} \tag{3.15}$$

≪DLPO$_o$-Output Oriented≫

$$\text{Objective:} \quad w = \eta \to \max \tag{3.16}$$
$$\text{Constrained:} \quad \mathrm{X}\boldsymbol{\mu} \le \boldsymbol{x}_o \tag{3.17}$$
$$-\mathrm{Y}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{y}_o\eta \le \boldsymbol{0} \tag{3.18}$$
$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} = 1 \tag{3.19}$$
$$\boldsymbol{\mu} \ge \boldsymbol{0} \tag{3.20}$$

Figure4: BCC-Output Oriented

4. 入力指向と出力指向の関係

第2節で紹介したモデル式を用いて、CCR Model における入力指向と出力指向の関係性について考える。計算過程ならびに計算結果を図5として示す。

≪Input Data and Output Data≫

$$\boldsymbol{0} = -\mathrm{X}\boldsymbol{\lambda}^* + \boldsymbol{x}_o\theta^*$$
$$\text{Input Matrix:} \quad \mathrm{X} = \boldsymbol{x}_o\theta^* / \boldsymbol{\lambda}^* \tag{4.1}$$
$$\boldsymbol{0} = -\mathrm{Y}\boldsymbol{\mu}^* + \boldsymbol{y}_o\eta^*$$
$$\text{Output Matrix:} \quad \mathrm{Y} = \boldsymbol{y}_o\eta^* / \boldsymbol{\mu}^* \tag{4.2}$$
$$1 = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{x}_o$$
$$\text{Input Vector:} \quad \boldsymbol{x}_o = 1/\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}*} \tag{4.3}$$
$$1 = \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{y}_o$$
$$\text{Output Vector:} \quad \boldsymbol{y}_o = 1/\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}*} \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{y}_o = \mathrm{Y}\boldsymbol{\lambda}^*$$
$$1 = \eta^*\boldsymbol{\lambda}^* / \boldsymbol{\mu}^*$$
$$\text{Lambda:} \quad \boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\mu}^* / \eta^* \tag{4.5}$$

≪Weight Vector≫

$$\boldsymbol{0} = -\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}*}\mathrm{X} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}*}\mathrm{Y}$$
$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{x}_o\theta^* / \boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{y}_o\eta^* / \boldsymbol{\mu}^*$$
$$\theta^* / \boldsymbol{\lambda}^* = (\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}*}\eta^*) / (\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{\mu}^*)$$
$$\theta^* = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}*} / \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}*}$$
$$\text{Output Weight:} \quad \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}*} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}*} / \theta^* \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{0} = -\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}*}\mathrm{X} + \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}*}\mathrm{Y}$$
$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{x}_o\theta^* / \boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{y}_o\eta^* / \boldsymbol{\mu}^*$$
$$(\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}*}\theta^*) / (\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{\lambda}^*) = \eta^* / \boldsymbol{\mu}^*$$
$$1 = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}*}\theta^* / \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}*}$$
$$\text{Input Weight:} \quad \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}*} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}*} / \theta^* \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{x}_o = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{x}_o / \theta^*$$
$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{x}_o = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{x}_o\eta^*$$
$$\text{Output Score:} \quad \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{x}_o = \eta^* \tag{4.8}$$

≪Input Oriented and Output Oriented≫

$$\mathrm{X}\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{x}_o$$
$$\theta^*\boldsymbol{\mu}^* / \boldsymbol{\lambda}^* = 1$$
$$\theta^*\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{\lambda}^*$$
$$\text{Input Score:} \quad \theta^* = 1/\eta^* \tag{4.9}$$

Figure5: Process

式(4.7)より、入力ウェイト(入力指向)と効率値の除算結果は入力ウェイト(出力指向)と等しいことが分かる。式(4.6)より、出力ウェイト(入力指向)と効率値の除算結果は出力ウェイト(出力指向)と等しいことがわかる。式(4.9)より、CCR-I 効率値は CCR-O 効率値の逆数と等しくなる。

5. 入力指向 Slack と出力指向 Slack

CCR-I Slack と CCR-O Slack の関係性を考える。CCR-I Slack と CCR-O Slack を定式化することで、式(5.1),(5.2)が得られる。式(5.1),(5.2)は式(4.5),(4.9)を用いることで式(5.3),(5.4)に変形することができる。CCR-I Slack(+)と CCR-I 効率値の除算結果は CCR-O Slack(+)と同等で、CCR-I Slack(-)と CCR-I 効率値の除算結果は CCR-O Slack(-)と等しくなる。

≪CCR-I Slack≫

$$\text{Excess: } s^- = \boldsymbol{x}_o\theta - X\boldsymbol{\lambda}$$
$$\text{Shortage: } s^+ = Y\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{y}_o \qquad (5.1)$$

≪CCR-O Slack≫

$$\text{Excess: } t^- = \boldsymbol{x}_o - X\boldsymbol{\mu}$$
$$\text{Shortage: } t^+ = Y\boldsymbol{\mu} - \eta\boldsymbol{y}_o \qquad (5.2)$$

⬇

≪Slack Excess≫

$$t^- = \boldsymbol{x}_o - X\boldsymbol{\mu}$$
$$t^- = \boldsymbol{x}_o - X\boldsymbol{\lambda}\eta$$
$$t^- = \boldsymbol{x}_o - X\boldsymbol{\lambda}/\theta$$
$$t^-\theta = \boldsymbol{x}_o\theta - X\boldsymbol{\lambda}$$
$$\text{Excess: } t^- = s^-/\theta \qquad (5.3)$$

≪Slack Shortage≫

$$s^+ = Y\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{y}_o$$
$$s^+ = Y\boldsymbol{\mu}/\eta - \boldsymbol{y}_o$$
$$s^+ = Y\boldsymbol{\mu}\theta - \boldsymbol{y}_o$$
$$s^+/\theta = Y\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{y}_o/\theta$$
$$s^+/\theta = Y\boldsymbol{\mu} - \eta\boldsymbol{y}_o$$
$$\text{Shortage: } t^+ = s^+/\theta \qquad (5.4)$$

Figure6: Slack

6. 1 入力 1 出力データによる例

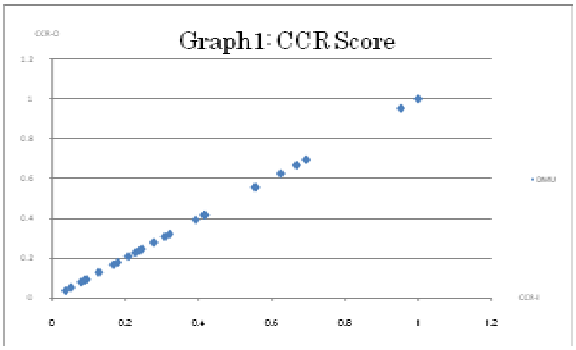
1 入力 1 出力データを任意に作成し、DEA による効率性評価を行った。本研究では DEA-Solver を用いて効率性評価を行った。表 1 に入力データと出力データ、DEA-Solver によって得られた効率値を掲載する。

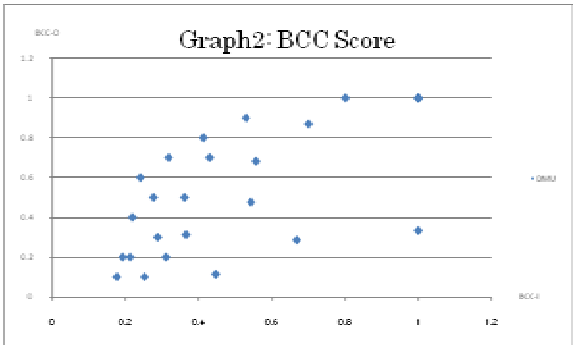
x 軸を CCR-I 効率値、*y* 軸を CCR-O 効率値としてグラフ 1 を作成した。第 4 節で式(4.9)を取り上げて、CCR-I 効率値が CCR-O 効率値の逆数と等しいことを理論的に証明した。グラフ 1 を観察するとプロットされた点が一直線上に並んでいることに気付く。よって、CCR-I 効率値は CCR-O 効率値の逆数と等しいことが実験的にも証明された。

次に、*x* 軸を BCC-I 効率値、*y* 軸を BCC-O 効率値としてグラフ 2 を作成した。グラフ 2 を観察すると、点が一直線上に並んでいないことに気付く。よって、BCC-I 効率値と BCC-O 効率値の逆数は等しくないことが分かった。

Table1: Data And Score

	Data		Score (1 Input / 1 Output)			
∨	Input	Output	BCC-I	BCC-O	CCR-I	CCR-O
A	4	1	1.0000000	0.3333333	0.2083333	0.2083333
B	4	3	1.0000000	1.0000000	0.6250000	0.6250000
C	5	6	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
D	6	2	0.6666667	0.2857143	0.2777778	0.2777778
E	7	8	1.0000000	1.0000000	0.9523810	0.9523810
F	8	4	0.5416667	0.4761905	0.4166667	0.4166667
G	9	1	0.4444444	0.1136364	9.26E-02	9.26E-02
H	9	6	0.5555556	0.6818182	0.5555556	0.5555556
I	10	8	0.7000000	0.8695652	0.6666667	0.6666667
J	11	3	0.3636364	0.3125000	0.2272727	0.2272727
K	12	10	1.0000000	1.0000000	0.6944444	0.6944444
L	13	2	0.3076923	0.2000000	0.1282051	0.1282051
M	13	5	0.3589744	0.5000000	0.3205128	0.3205128
N	14	3	0.2857143	0.3000000	0.1785714	0.1785714
O	14	7	0.4285714	0.7000000	0.4166667	0.4166667
P	15	10	0.8000000	1.0000000	0.5555556	0.5555556
Q	16	1	0.2500000	1.00E-01	5.21E-02	5.21E-02
R	17	5	0.2745098	0.5000000	0.2450980	0.245098
S	17	8	0.4117647	0.8000000	0.3921569	0.3921569
T	18	9	0.5277778	0.9000000	0.4166667	0.4166667
U	19	2	0.2105263	0.2000000	8.77E-02	0.0877193
V	19	7	0.3157895	0.7000000	0.3070175	0.3070175
W	20	4	0.2166667	0.4000000	0.1666667	0.1666667
X	21	6	0.2380952	0.6000000	0.2380952	0.2380952
Y	21	2	0.1904762	0.2000000	7.94E-02	7.94E-02
Z	23	1	0.173913	0.1000000	3.62E-02	0.0362319





BCC Model ならびに CCR Model におけるウェイトをそれぞれ表2,3として掲載した。表3を観察すると、入力ウェイト(入力指向)と効率値の除算結果は、入力ウェイト(出力指向)と等しくなっていることが分かる。また、出力ウェイト(入力指向)と効率値の除算結果は出力ウェイト(出力指向)と等しいことも分かる。これらの結果から、第 4 節で説明した式(4.6) ,(4.7)の関係が実験的に証明されたと言える。なお、BCC Model の場合は等しくならなかった(表 2 参照)。

Table2: BCC Weight Vector

	BCC-I	BCC-O	BCC-I	BCC-O
	nput Weight/Score	Input Weight	)utput Weight/Scor	Output Weight
A	0.250000000	3	0	1
B	0.250000000	1	0.083333333	0.333333333
C	0.200000000	0.200000000	0.166666667	0.166666667
D	0.250000000	0.500000000	0	0.500000000
E	0.142857143	0.125000000	0.142857143	0.125000000
F	0.230769231	0.100000000	0.076923077	0.250000000
G	0.250000000	0.400000000	0	1
H	0.200000000	0.066666667	0.166666667	0.166666667
I	0.142857143	0.050000000	0.142857143	0.125000000
J	0.250000000	0.133333333	0.083333333	0.333333333
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
R	0.214285714	0	0.071428571	0.200000000
S	0.142857143	0	0.142857143	0.125000000
T	0.105263158	0	0.263157895	0.111111111
U	0.250000000	0	0	0.500000000
V	0.166666667	0	0.166666667	0.142857143
W	0.230769231	0	0.076923077	0.250000000
X	0.200000000	0	0.166666667	0.166666667
Y	0.250000000	0	0	0.500000000
Z	0.250000000	0	0	1

Table3: CCR Weight Vector

	CCR-I	CCR-O	CCR-I	CCR-O
	nput Weight/Score	Input Weight	)utput Weight/Scor	Output Weight
A	1.200	1.200	1.000	1.000
B	0.400	0.400	0.333333333	0.333333333
C	0.200	0.200	0.166666667	0.166666667
D	0.600	0.600	0.500	0.500
E	0.150	0.150	0.125	0.125
F	0.300	0.300	0.250	0.250
G	1.200	1.200	1.000	1.000
H	0.200	0.200	0.166666667	0.166666667
I	0.150	0.150	0.125	0.125
J	0.400	0.400	0.333333333	0.333333333
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
R	0.240	0.240	0.200	0.200
S	0.150	0.150	0.125	0.125
T	0.133333333	0.133333333	0.111111111	0.111111111
U	0.600	0.600	0.500	0.500
V	0.171428571	0.171428571	0.142857143	0.142857143
W	0.300	0.300	0.250	0.250
X	0.200	0.200	0.166666667	0.166666667
Y	0.600	0.600	0.500	0.500
Z	1.200	1.200	1.000	1.000

参考文献

[1] 刀根薫, 包絡分析法DEAによる経営効率性の測定と改善, 日科技連 (1993)

[2] 上田徹, オペレーションズ・マネージメント 経営の科学とその応用, 牧野書店 (2006), pp.186-218