

一般化平均と最適化

(その 3)一般化平均(p, q)計画法への展開

日大生産工 ○篠原 正明

情報システム研究所 篠原 健

1.はじめに

(その 1)では幾何計画法のレビュー、(その 2)では調和計画法について、例題を通して説明した。(その 3)では、 p 次一般化平均と q 次一般化平均との間の不等式という一般形で(p, q) 計画法として定式化を行うと共に、(p, q) 計画法の具体例について解説する。

$$\left(\frac{1}{n} \sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{n} \sum x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad (4)$$

(4)の両辺を q 乗すると、(5)を得る(但し、 $p < q$)。

$$\left(\frac{1}{n} \sum x_i^p\right)^{\frac{q}{p}} \leq \frac{1}{n} \sum x_i^q \quad (5)$$

2.(p, q) 計画法として一般化

n 個の正值データ $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($x_i > 0$) に対する p 次一般化平均、 q 次一般化平均は各々(1)、(2)となる但し $p < q$ 。

$$G(p; X_n) = \left(\frac{1}{n} \sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

$$G(q; X_n) = \left(\frac{1}{n} \sum x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad (2)$$

$p < q$ の条件下では、不等式(3)が成立する。

$$G(p; X_n) \leq G(q; X_n) \quad (3)$$

ここで、等号が成立するのは、 $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ の時で、かつその時に限る。この不等式を(p, q) 不等式と呼ぶとする。
(p, q) 不等式に基づく最適化として、以下に(p, q) 計画法を提案する。その前に、(p, q) 不等式を以下に再表現する。

2 つの正データ $x > 0, y > 0$ について再表記すると(6)、その重み付版(7)となる。

$$\left(\frac{1}{2}(x^p + y^p)\right)^{\frac{q}{p}} \leq \frac{1}{2}(x^q + y^q) \quad (6)$$

$$(w_1 x^p + w_2 y^p)^{\frac{q}{p}} \leq w_1 x^q + w_2 y^q \quad (7)$$

[例題 1 : 制約あり (p, q) 計画法、 $p < q$]

目的関数 : $f(x, y) = 2x^q + y^q \rightarrow$ 最小化

制約条件 : $x^p + y^p = 1$ (8)

($x > 0, y > 0$)

[例題 1 の解]

目的関数 $f(x, y)$ に(7)式の不等式を適用する。

$$f(x, y) = 2x^q + y^q$$

$$= w_1 \left(\frac{2x^q}{w_1}\right) + w_2 \left(\frac{y^q}{w_2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left(w_1 \left(\frac{2x^q}{w_1} \right)^{\frac{p}{q}} + w_2 \left(\frac{y^q}{w_2} \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{q}{p}} \\
&= \left(2^{\frac{p}{q}} w_1^{1-\frac{p}{q}} x^p + w_2^{1-\frac{p}{q}} y^p \right)^{\frac{q}{p}} \quad (9)
\end{aligned}$$

ここで、(9)式右辺において、

$$2^{\frac{p}{q}} w_1^{1-\frac{p}{q}} : w_2^{1-\frac{p}{q}} = 1:1 \quad (10)$$

(10)式ならば、右辺項は(8)式の制約条件を代入することにより定数項となる。
 $w_1 + w_2 = 1$ 、(10)式、 $w_1 > 0, w_2 > 0$ より、以下を得る。

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{2^{-\frac{p}{q-p}}}{1 + 2^{-\frac{p}{q-p}}}, \\
w_2 &= \frac{1}{1 + 2^{-\frac{p}{q-p}}} \quad (11)
\end{aligned}$$

すなわち、目的関数 $f(x, y)$ に対して、以下の不等式が成立する。

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= 2x^q + y^q \\
&\geq w_2^{1-\frac{p}{q}} (x^p + y^p)^{\frac{q}{p}} \\
&= w_2^{1-\frac{p}{q}} \\
&= \left(\frac{1}{1 + 2^{-\frac{p}{q-p}}} \right)^{\frac{q-p}{q}} \quad (12)
\end{aligned}$$

従って、 $f(x, y)$ は $\frac{2x^q}{w_1} = \frac{y^q}{w_2}$ (13)の時に限って(12)式の右辺の最小値をとる。

(8)と(13)、 $x > 0, y > 0$ より以下を得る。

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\left(1 + 2^{\frac{p}{q-p}} \right)^{\frac{1}{p}}}, \\
y &= \frac{2^{\frac{1}{q-p}}}{\left(1 + 2^{\frac{p}{q-p}} \right)^{\frac{1}{p}}} \quad (14)
\end{aligned}$$

解：

$$\begin{aligned}
f_{\min} &= \left(\frac{1}{1 + 2^{-\frac{p}{q-p}}} \right)^{\frac{q-p}{q}} \\
x &= \frac{1}{\left(1 + 2^{\frac{p}{q-p}} \right)^{\frac{1}{p}}}, y = \frac{2^{\frac{1}{q-p}}}{\left(1 + 2^{\frac{p}{q-p}} \right)^{\frac{1}{p}}}
\end{aligned}$$

3. おわりに

(その 1)～(その 3)を通して、一般化平均不等式に基づく計画法を提案し、例題を通して様々な計画法の可能性を検討した。
 今後の研究課題として(p,q)計画法について、以下の2点が考えられる。

- (1) 一般化平均不等式計画法、具体的には(p,q)計画法について、簡単な例題を通してその可能性を示したが、(その 4)と同じレベルでの理論展開。
- (2) 幾何計画法以外の(p,q)計画法の適用領域の開拓。