7-5

すべり摩擦を含んだ振動応答解析に関する研究

－その1．各種すべり現象に基づく解析モデルの構築－

日大生産工(院)　○高橋　亜佑美　　日大生産工(院)　　中根　彰人
日大生産工(院)　　橋上　聡　　株式会社ブリヂストン　　藤沢　佳孝
日大生産工　　柴田　耕一

1.　序論

本論は質点にバネ、減衰、摩擦抵抗がある場合の振動応答について述べたものである。

本研究は藤沢ら[*1]が、すべり摩擦についての研究を行ってきたが、その中で応答加速度に不連続点が生じていた。この現象は実現象では起こりえないものであり、今回構築した解析モデルによりこの現象の解決に至った。

この手法は、例えば建物のすべり摩擦型免震の研究、自動車などのタイヤの、すべりを含んだ振動応答解析に、応用可能である。

本論では、まずその1で構築した解析モデルについて説明し、その2では従来手法との比較、結果についてまとめる。

2.　解析手法

2.1　すべり摩擦を持つ系の運動方程式

図1に示すような質量 m の質点に、減衰係数 c 、ばね定数 k さらに、クーロン摩擦力 γ が作用する系に強制外力(加速度 $\ddot{y}$)が加わる場合の運動方程式は以下のように示す。

[質点が静止する場合]

$$\ddot{x}=0,\ \dot{x}=0,\ x=CONST \tag{1}$$

[質点が滑っている場合]

$$m(\ddot{x}+\ddot{y})+c\dot{x}+kx+\gamma sgn(\dot{x})=0 \tag{2}$$

$$\gamma=\mu mg \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}>0\rightarrow sgn\ (\dot{x})=+1\\ \dot{x}<0\rightarrow sgn\ (\dot{x})=-1\end{array}\right\} \tag{4}$$

滑り、静止の判定は以下の式を満たすとき質点は滑り、それ以外は静止とする。

$$\left|m(\ddot{x}+\ddot{y})+c\dot{x}+kx\right|>\gamma \tag{5}$$

質点のすべり現象の場合分けに関しては**2.3**で説明する。この運動方程式を線形加速度法により解析した。

2.2　線形加速度法

線形加速度法は、まず時間軸を微小区間Δt [s]で区切る。時刻t における応答量がわかっているとき、次の時刻$t+\Delta t$ [s]における応答を求める関係式をつくり、これを数値計算によって繰り返し求めていく。今、時刻t [s]における x の値を x_t 、$t+\Delta t$ [s]の値を $x_{t+\Delta t}$ とすれば、変位、速度、加速度はテーラー展開式から、

$$x_{t+\Delta t}=x_t+\dot{x}_t\cdot\Delta t+\ddot{x}_t\cdot(\Delta t)^2/2+\dddot{x}_t\cdot(\Delta t)^3/6\cdots \tag{6}$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t}=\dot{x}_t+\ddot{x}_t\cdot\Delta t+\dddot{x}_t\cdot(\Delta t)^2/2\cdots \tag{7}$$

$$\ddot{x}_{t+\Delta t}=\ddot{x}_t+\dddot{x}_t\cdot\Delta t+\cdots \tag{8}$$

ここでΔt [s]間では、$\ddot{x}$ は直線的に変化すると仮定する。すると x_t の4階以上の微分係数は0となり、3階以上の微分係数に対して次式が成立する。

$$\dddot{x}_t=\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}-\ddot{x}_t}{\Delta t} \tag{9}$$

そこで式(9)を式(6)、(7)へ代入すると、

$$x_{t+\Delta t}=x_t+\dot{x}_t\cdot\Delta t+(2\ddot{x}_t+\ddot{x}_{t+\Delta t})\cdot(\Delta t)^2/6 \tag{10}$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t}=\dot{x}_t+(\ddot{x}_t+\ddot{x}_{t+\Delta t})\cdot\Delta t/2 \tag{11}$$

となる関係式が得られる。

線形加速度法は、これらの関係式を用いて、次のような手順で応答計算を行う。まず、時刻t [s]における $x_t,\dot{x}_t,\ddot{x}_t$ がわかっているものとし、式(10), 式(11)へ代入する。$\ddot{x}_{t+\Delta t}$ は未定なので第１近似として $\ddot{x}_t$ を使う。すると第１近似として $\ddot{x}_t$ が求まる。この第一近似を式(10)、(11)へ再度代入して第2近似を求める。この操作を必要な精度になるまで繰り返す。

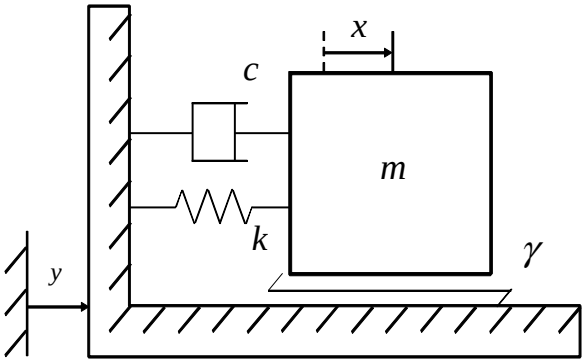

図1.　すべり摩擦を持つ1質点系モデル図

Study on Analysis of Vibration Response Including Sliding Friction
-Part1. Construction of Analytical Model based on Various Sliding Phenomena-
Ayumi TAKAHASHI , Akihito NAKANE , Satoru HASHIGAMI ,
Yoshitaka FUJISAWA and Kouichi SHIBATA

2.3　各種すべり現象に基づく解析モデル

線形加速度法で解析するにあたり、Δt [s]間で質点がどのような運動をするか判別する必要がある。筆者らは6つの場合に分けて解析を行った。

①質点が静止していて、Δt [s]間ですべり出さない

$$\ddot{x}_{t+\Delta t}=0,\ \dot{x}_{t+\Delta t}=0,\ x_{t+\Delta t}=CONST \tag{12}$$

②質点が静止していて、Δt [s]間ですべり出す

質点がすべり出す時刻を$t+\Delta t_c$ [s]とすると、次式より求めるこができる 。(図2.a)

$$F=m(\ddot{x}+\ddot{y})+c\dot{x}+kx \tag{13}$$

とおくと、以下の関係式を得る。

$$\gamma=\frac{(F_{t+\Delta t}-F_t)}{\Delta t}\cdot\Delta t_c+F_t$$

$$\Delta t_c=\frac{(\gamma-F_t)}{(F_{t+\Delta t}-F_t)}\cdot\Delta t \tag{14}$$

時刻t [s]から$t+\Delta t_c$ [s]間では、時刻t [s]から質点は静止している。(図2.b)

$$\ddot{x}_{t+\Delta t_c}=0,\ \dot{x}_{t+\Delta t_c}=0,\ x_{t+\Delta t_c}=CONST \tag{15}$$

時刻$t+\Delta t_c$ [s]から$t+\Delta t$ [s]間では、刻み時間を$\Delta t_{\bar{c}}$ ($\Delta t_{\bar{c}}=\Delta t-\Delta t_c$)[s]として線形加速度法で計算する。

$$\left.\begin{aligned}
x_{t+\Delta t}&=x_{t+\Delta t_c}+\dot{x}_{t+\Delta t_c}\cdot\Delta t_{\bar{c}}+\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t_c}}{3}\cdot\Delta t_{\bar{c}}^2+\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{6}\cdot\Delta t_{\bar{c}}^2\\
\dot{x}_{t+\Delta t}&=\dot{x}_{t+\Delta t_c}+\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t_c}}{2}\cdot\Delta t_{\bar{c}}+\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{2}\cdot\Delta t_{\bar{c}}\\
\ddot{x}_{t+\Delta t}&=-\ddot{y}_{t+\Delta t}-\frac{c}{m}\dot{x}_{t+\Delta t}-\frac{k}{m}x_{t+\Delta t}\\
&\quad-\frac{\gamma}{m}sgn(\dot{x}_{t+\Delta t})
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

③質点がすべっていて、Δt [s]間すべり続ける

通常の線形加速度法を行う。

$$\left.\begin{aligned}
x_{t+\Delta t}&=x_t+\dot{x}_t\cdot\Delta t+\frac{\ddot{x}_t}{3}\cdot\Delta t^2+\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{6}\cdot\Delta t^2\\
\dot{x}_{t+\Delta t}&=\dot{x}_t+\frac{\ddot{x}_t}{2}\cdot\Delta t+\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{2}\cdot\Delta t\\
\ddot{x}_{t+\Delta t}&=-\ddot{y}_{t+\Delta t}-\frac{c}{m}\dot{x}_{t+\Delta t}-\frac{k}{m}x_{t+\Delta t}\\
&\quad-\frac{\gamma}{m}sgn(\dot{x}_{t+\Delta t})
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

④質点がすべっていて、Δt [s]間で速度の向きが逆転する

速度の向きが変わる時刻を$t+\Delta t_c$ [s]とすると、式(11)より次式が求まる。(図3.a)

$$\dot{x}_{t+\Delta t_c}=\dot{x}_t+\frac{\ddot{x}_t}{2}\cdot\Delta t_c+\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t_c}}{2}\cdot\Delta t_c$$

$\dot{x}_{t+\Delta t_c}=0$より、

$$\Delta t_c=\frac{-2\dot{x}_t}{\ddot{x}_t+\ddot{x}_{t+\Delta t_c}} \tag{18}$$

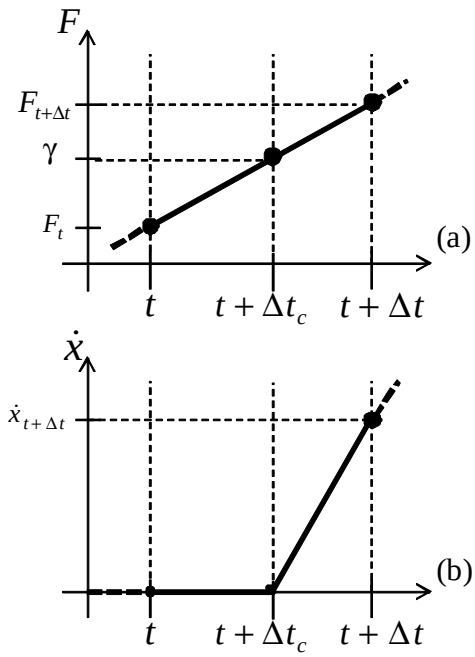

図2. 質点が静止していて、Δt [s]間ですべり出す場合

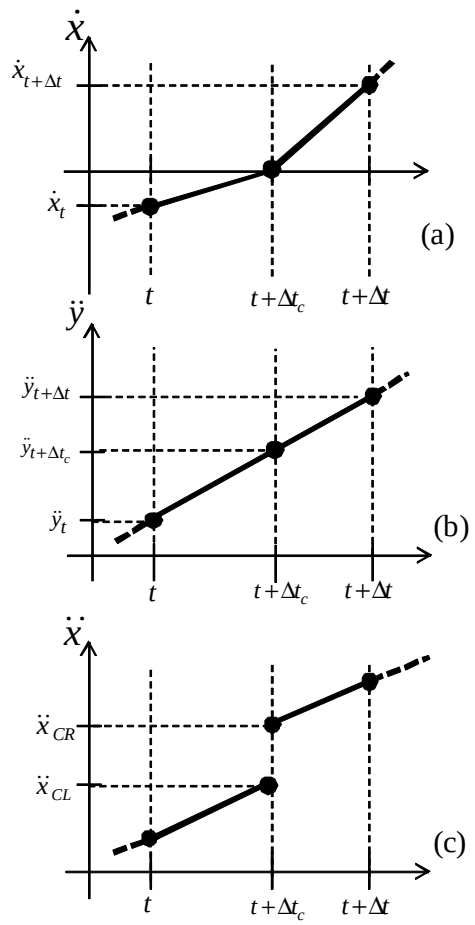

図3. 質点がすべっていて、Δt [s]間で速度の向きが逆転する場合

時刻 $t+\Delta t_c$ [s]のときの入力加速度は、(図3.b)

$$\ddot{y}_{t+\Delta t_c} = \frac{\ddot{y}_{t+\Delta t} - \ddot{y}_t}{\Delta t} \cdot \Delta t_c + \ddot{y}_t \tag{19}$$

時刻 $t+\Delta t_c$ の変位、速度、加速度は、

$$\left.\begin{aligned} x_{t+\Delta t_c} &= x_t + \dot{x}_t \cdot \Delta t_c + \frac{\ddot{x}_t}{3} \cdot \Delta t_c^2 + \frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{6} \cdot \Delta t_c^2 \\ \dot{x}_{t+\Delta t_c} &= 0 \\ \ddot{x}_{t+\Delta t_c} &= -\ddot{y}_{t+\Delta t_c} - \frac{c}{m}\dot{x}_{t+\Delta t_c} - \frac{k}{m}x_{t+\Delta t_c} \\ &\quad - \frac{\gamma}{m} sgn\,(\dot{x}_{t+\Delta t_c}) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

時刻 $t+\Delta t_c$ [s]から $t+\Delta t$ [s]間を、計算する。次に不連続な加速度を求める。(図3.c)

$$\ddot{x}_{CL} = -\ddot{y}_{t+\Delta t} - \frac{c}{m}\dot{x}_{t+\Delta t_c} - \frac{k}{m}x_{t+\Delta t_c} - \frac{\gamma}{m} sgn(\dot{x}_{CL}) \tag{21}$$

$$\ddot{x}_{CR} = -\ddot{y}_{t+\Delta t} - \frac{c}{m}\dot{x}_{t+\Delta t_c} - \frac{k}{m}x_{t+\Delta t_c} - \frac{\gamma}{m} sgn(\dot{x}_{CR}) \tag{22}$$

$\dot{x}_{CR}$ と $\dot{x}_{CL}$ は符号が逆になるので、

$$sgn(\dot{x}_{CR}) = -sgn(\dot{x}_{CL}) \tag{23}$$

よって、

$$\ddot{x}_{CR} - \ddot{x}_{CL} = 2\frac{\gamma}{m} sgn(\dot{x}_{CR}) \tag{24}$$

$\ddot{x}_{CL} = \ddot{x}_{t+\Delta t_c}$ より、

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_{CR} &= \ddot{x}_{t+\Delta t_c} + 2\frac{\gamma}{m} sgn(\dot{x}_{CR}) \\ \dot{x}_{CR} &= 0,\ x_{CR} = x_{t+\Delta t_c} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$\Delta t_{\bar{c}}$ $(\Delta t_{\bar{c}} = \Delta t - \Delta t_c)$[s]を用いて計算する。

$$\left.\begin{aligned} x_{t+\Delta t} &= x_{CR} + \dot{x}_{CR} \cdot \Delta t_{\bar{c}} + \frac{\ddot{x}_{CR}}{3} \cdot \Delta t_{\bar{c}}^2 + \frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{6} \cdot \Delta t_{\bar{c}}^2 \\ \dot{x}_{t+\Delta t} &= \dot{x}_{CR} + \frac{\ddot{x}_{CR}}{2} \cdot \Delta t_{\bar{c}} + \frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{2} \cdot \Delta t_{\bar{c}} \\ \ddot{x}_{t+\Delta t} &= -\ddot{y}_{t+\Delta t} - \frac{c}{m}\dot{x}_{t+\Delta t} - \frac{k}{m}x_{t+\Delta t} \\ &\quad - \frac{\gamma}{m} sgn(\dot{x}_{t+\Delta t}) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

⑤質点がすべっていて、Δt [s]間で静止する

質点が静止する時刻を $t+\Delta t_c$ [s]とすると式(18)を用いて、時刻 t から $t+\Delta t_c$ 間を計算する。(図4)

$$\left.\begin{aligned} x_{t+\Delta t_c} &= x_t + \dot{x}_t \cdot \Delta t_c + \frac{\ddot{x}_t}{3} \cdot \Delta t_c^2 + \frac{\ddot{x}_{t+\Delta t_c}}{6} \cdot \Delta t_c^2 \\ \dot{x}_{t+\Delta t_c} &= 0,\ \ddot{x}_{t+\Delta t_c} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

時刻 $t+\Delta t_c$ [s]から $t+\Delta t$ [s]間を計算する。

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = 0,\ \dot{x}_{t+\Delta t} = 0,\ x_{t+\Delta t} = CONST \tag{28}$$

⑥質点がすべっていて、Δt [s]間で静止して再びすべり出す

②と⑤を合わせたものである。質点が静止する時刻を $t+\Delta t_c$ [s]とすると式(18)を用いて、時刻 t [s]から $t+\Delta t_c$ [s]間を計算する。

$$\left.\begin{aligned} x_{t+\Delta t_c} &= x_t + \dot{x}_t \cdot \Delta t_c + \frac{\ddot{x}_t}{3} \cdot \Delta t_c^2 + \frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{6} \cdot \Delta t_c^2 \\ \dot{x}_{t+\Delta t_c} &= 0,\ \ddot{x}_{t+\Delta t_c} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

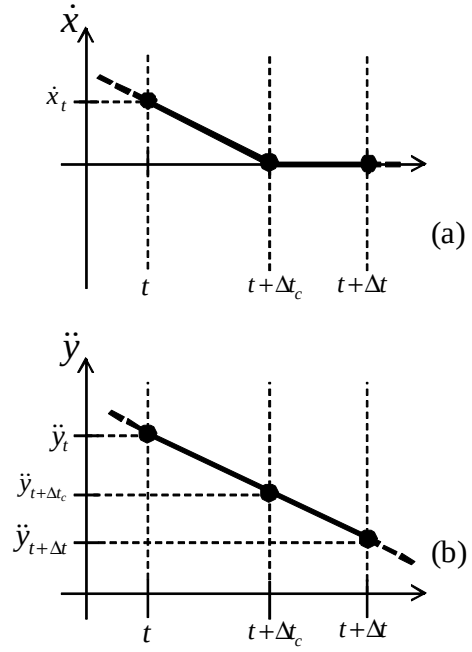

図4. 質点がすべっていて、Δt [s]間で静止する場合

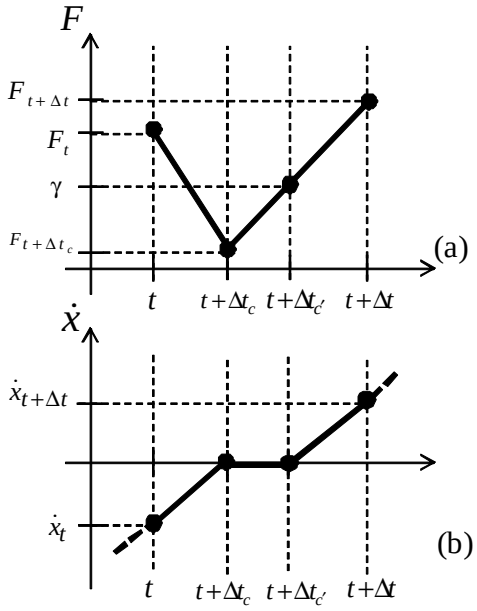

図5. 質点がすべっていて、Δt [s]間で静止して再びすべり出す場合

次に、慣性力がγと等しくなる時刻$t+\Delta t_{c'}$[s]を求める。刻み時間を$\Delta t_{\bar{c}}$ ($\Delta t_{\bar{c}}=\Delta t-\Delta t_c$)[s]とする。(図5a)

$$\gamma=\frac{(F_{t+\Delta t}-F_{t+\Delta t_c})}{\Delta t_{\bar{c}}}\cdot\Delta t_{c'}+F_{t+\Delta t_c}$$

$$\Delta t_{c'}=\frac{(\gamma-F_{t+\Delta t_c})}{(F_{t+\Delta t}-F_{t+\Delta t_c})}\cdot\Delta t_{\bar{c}} \qquad (30)$$

時刻$t+\Delta t_c$ [s]から$t+\Delta t_{c'}$[s]間では、質点は静止している。(図5b)

$$\ddot{x}_{t+\Delta t_{c'}}=0,\ \dot{x}_{t+\Delta t_{c'}}=0,\ x_{t+\Delta t_{c'}}=CONST \qquad (31)$$

時刻$t+\Delta t_{c'}$ [s]から$t+\Delta t$ 間[s]では、刻み時間を$\Delta t_{\bar{c}'}$ ($\Delta t_{\bar{c}'}=\Delta t_{\bar{c}}-\Delta t_{c'}$)[s]として線形加速度法で計算する。

$$\left.\begin{aligned}
x_{t+\Delta t}&=x_{t+\Delta t_{c'}}+\dot{x}_{t+\Delta t_{c'}}\cdot\Delta t_{\bar{c}'}+\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t_{c'}}}{3}\cdot\Delta t_{\bar{c}'}^2+\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{6}\cdot\Delta t_{\bar{c}'}^2\\
\dot{x}_{t+\Delta t}&=\dot{x}_{t+\Delta t_{c'}}+\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t_{c'}}}{2}\cdot\Delta t_{\bar{c}'}+\frac{\ddot{x}_{t+\Delta t}}{2}\cdot\Delta t_{\bar{c}'}\\
\ddot{x}_{t+\Delta t}&=-\ddot{y}_{t+\Delta t}-\frac{c}{m}\dot{x}_{t+\Delta t}-\frac{k}{m}x_{t+\Delta t}\\
&\quad-\frac{\gamma}{m}sgn(\dot{x}_{t+\Delta t})
\end{aligned}\right\}(32)$$

3. 解析結果

すべり摩擦を含む質点系に入力加速度を与えた場合の挙動を確認するために、$m=0.816$[kg]、$c=0.0$[kgf・s/cm]、$k=1.8$[kgf/cm] 、$\mu=0.1$とした質点系に、周波数2.0[Hz] 、最大加速度500[gal]の正弦波(図6)を入力し、応答解析を行った。図7は相対応答変位波形、図8は絶対応答加速度波形、図9は履歴復元力曲線を示す。絶対応答加速度波形から質点がすべり摩擦の影響により、応答がある一定以上の加速度にならないことがわかる。

4. 結論

これらの結果から以下の3項が明らかとなった。

1. 刻み幅Δt をただ微小にする必要はなく、入力加速度の分割を、応答に合わせてフィードバックして行えばよいことが分かった。
2. どの時刻で速度の向きが変化しているか、確認することができた。
3. 刻み幅Δt 内での変化も細かく解析するため、現象をより正確に捉えることができた。

今後、実地震波を入力した場合の応答解析などによって、従来手法との比較、手法の検証を行う。

参考文献

1. 藤沢佳孝，柴田耕一：容器構造物の動的解析手法に関する研究(1987)，日本大学大学院生産工学研究科博士前期課程論文
2. 柴田耕一,山田隆夫,北川博：摩擦型免震に関する研究(その1)(1987)，建築学会大会

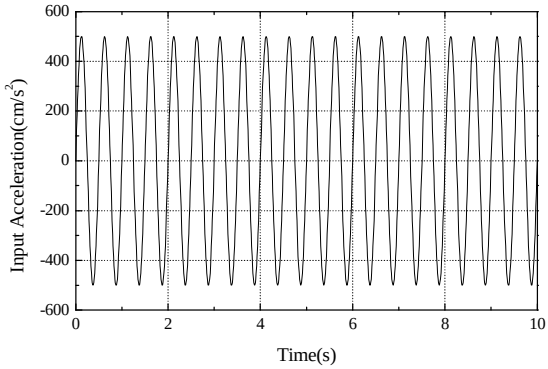

図6. 入力加速度波形: $\ddot{y}$

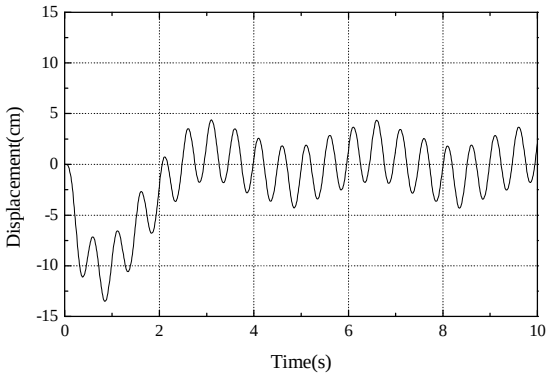

図7. 相対応答変位波形: x

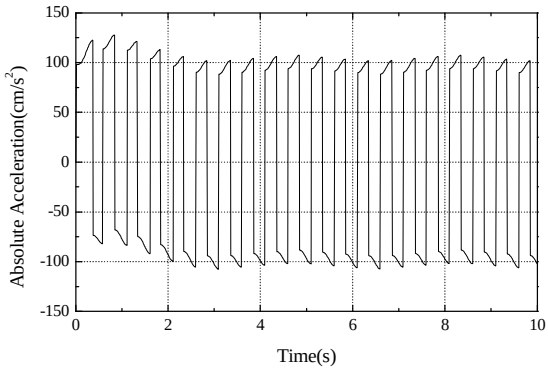

図8. 絶対応答加速度波形: $\ddot{x}+\ddot{y}$

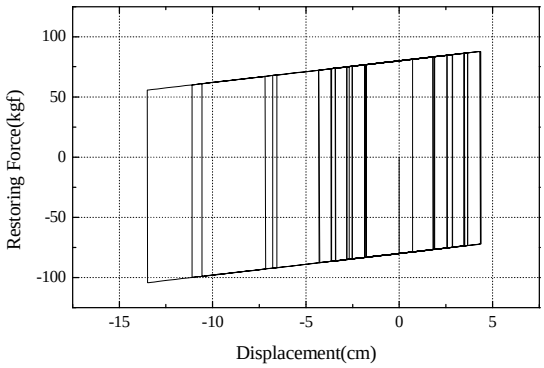

図9. 履歴復元力曲線