

DMU 付加に対する凸包モデル定理の数値計算による検証

日大生産工(院) ○吉村 彩
日大生産工 篠原 正明

1. はじめに

CCR モデル、BCC モデル、DRS モデル、IRS モデルなど凸包モデルにおける効率性測定は、それらの生産可能集合(PPS ; Production Possibility Set)の定義域に依存しており、いずれの定義域も既存活動データ集合(X,Y)の凸包に関連している。

CCR モデル、BCC モデル、DRS モデル、IRS モデルなど凸包モデルの PPS に対して統一的に解釈することによって、幾何学的考察を深め、各モデル間の関係を理論的に分析した[2]。本論文では、論文[2]の分析結果が実際に理論的に正しいかを数値実験により検証する。

2. 凸包モデルの PPS の解釈

凸包モデルの PPS は一般に、(1)~(4)で与えられる。

$$x \geq X\lambda \quad \dots(1)$$

$$y \leq Y\lambda \quad \dots(2)$$

$$\lambda \geq 0 \quad \dots(3)$$

$$L \leq e\lambda \leq U \quad \dots(4)$$

(4)で $e\lambda = p > 0$ と置き、 $s = \lambda / p$ と置換すると、(5)~(9)となる。

$$x \geq pXs \quad \dots(5)$$

$$y \leq pYs \quad \dots(6)$$

$$s \geq 0 \quad \dots(7)$$

$$es = 1 \quad \dots(8)$$

$$L \leq p \leq U \quad \dots(9)$$

ここで、(5)~(8)は s を λ と読み替えれば、 pX と pY をデータ集合として持つ基本 BCC モデルであるが、(9)式により、データ集合のとりうる範

囲が規定されている。

[例2.1] $L=0$ 、 $U=1$ のDRS(規模の収穫減少型)モデル

$0 \leq p \leq 1$ の範囲のデータ集合 (pX, pY) の凸包の各点の右下四半平面の和集合がPPSとなる。原データ集合(X,Y)の各点から原点を結ぶ線分の集合をデータ集合として持つ基本BCCモデルを想定する。

[例2.2] $L=1$ 、 $U=\infty$ のIRS(規模の収穫増加型)モデル

原点から原データ集合(X,Y)の各点を通る直線の各点から原点を含まない方向の半直線の集合をデータ集合として持つ基本BCCモデルを想定する。

3. DRSモデルとIRSモデルに関する検証

DRSモデルならびにIRSモデルのPPSに関する幾何学的説明図にもとづき、「DRSモデルのPPSは、原データ集合(X,Y)に原点(0,0)活動を追加した基本BCCモデルのPPS」、「IRSモデルのPPSは、原データ集合(X,Y)に無限遠点(∞, ∞)活動を追加した基本BCCモデルのPPS」との解釈が可能であり、数値実験によりこれを検証する。

[定理3.1]

既存活動のデータ集合(X,Y)に $n+1$ 番目の活動(0,0)を追加した新データ集合(X',Y')に対する基本BCCモデルのPPSはDRSモデルのPPSに一致する。

Verification by Numerical Calculation of Convex Envelopment Model
Theorems for DMU Addition

Aya YOSHIMURA and Masaaki SHINOHARA

(検証3.1)

表1：既存活動のデータ集合(X,Y)〔左〕

新データ集合(X',Y')〔右〕

DMU	(I)入力	(O)出力	DMU	(I)入力	(O)出力
A	2	1	A	2	1
B	3	3	B	3	3
C	3	2	C	3	2
D	4	3	D	4	3
E	5	4	E	5	4
F	5	2	F	5	2
G	6	3	G	6	3
H	8	5	H	8	5
			AA	0.0000000001	0.0000000001

既存活動のデータ集合にn+1番目の活動(0,0)として、DMU AAを追加したものが表1である。

LPソフト使用上、0では認証されないため、限りなく0に近い値として 10^{-9} を用いた。

表2：新データ集合のBCCモデルでの効率値〔左〕

新データ集合のDRSモデルでの効率値〔右〕

No.	DMU	Score	Input-Oriented NIRS Efficiency
1	A	0.5	
2	B	1	
3	C	0.666667	
4	D	0.75	
5	E	1	
6	F	0.4	
7	G	0.5	
8	H	1	
9	AA	1	
			DMU No. DMU Name Efficiency
			1 A 0.50000
			2 B 1.00000
			3 C 0.66667
			4 D 0.75000
			5 E 1.00000
			6 F 0.40000
			7 G 0.50000
			8 H 1.00000
			9 AA 1.00000

表2〔左〕と表2〔右〕の効率値を比べると、全てのDMUの値が同値であることが分かる。従って、定理3.1が数値実験により検証できた。

ここで、BCCモデルの効率値には[3]、DRSモデルの効率値計算には[4]のCDソフトを用いた。

[定理3.2]

既存活動のデータ集合(X,Y)にn+1番目の活動 (∞, ∞) を追加した新データ集合(X',Y')に対する基本BCCモデルのPPSはIRSモデルのPPSに一致する。

尚、n+1番目の活動を求める式として、以下の式を用いた[2]。

$$n+1\text{番目の活動入力データ} \quad \sum kx_i \cdots (10)$$

$$n+1\text{番目の活動出力データ} \quad \sum ky_i \cdots (11)$$

(検証 3.2-1)定理通りの検証

表3：既存活動のデータ集合(X,Y)〔左〕

新データ集合(X',Y')〔右〕

DMU	(I)入力	(O)出力	DMU	(I)入力	(O)出力
A	2	1	A	2	1
B	3	3	B	3	3
C	3	2	C	3	2
D	4	3	D	4	3
E	5	4	E	5	4
F	5	2	F	5	2
G	6	3	G	6	3
H	8	5	H	8	5
			BB	36000	23000

既存活動のデータ集合にn+1番目の活動(無限遠点相当)として、 $k=10^3$ としたDMU BBを追加したものが表3である。

表4：新データ集合のBCCモデルでの効率値〔左〕

新データ集合のIRSモデルでの効率値〔右〕

No.	DMU	Score	Input-Oriented NDRS Efficiency
1	A	1	
2	B	1	
3	C	0.833333	
4	D	0.75	
5	E	0.913058	
6	F	0.5	
7	G	0.5	
8	H	0.766323	
9	BB	1	
			DMU No. DMU Name Efficiency
			1 A 1.00000
			2 B 1.00000
			3 C 0.83333
			4 D 0.75000
			5 E 0.80000
			6 F 0.50000
			7 G 0.50000
			8 H 0.62500

表4〔左〕と表4〔右〕の効率値を比べると、全てのDMUの値は同値ではなく、DMU E,Hに大きな誤差が出た。従って、この場合については定理3.2は成立しているとは言えない。

ここで、n+1番目の活動の付加方法を変えて、再度検証を行なった。

(検証3.2-2)新しい付加方法

表5：既存活動のデータ集合(X,Y)〔左〕

新データ集合(X',Y')〔右〕

DMU	(I)入力	(O)出力	DMU	(I)入力	(O)出力
A	2	1	A	2	1
B	3	3	B	3	3
C	3	2	C	3	2
D	4	3	D	4	3
E	5	4	E	5	4
F	5	2	F	5	2
G	6	3	G	6	3
H	8	5	H	8	5
			AA	999999	999999

既存活動のデータ集合にn+1番目の活動(入力対出力が1対1)として、DMU AAを追加したものが表

5である。

表6：新データ集合のBCCモデルでの効率値〔左〕

新データ集合のIRSモデルでの効率値〔右〕

No.	DMU	Score	Input-Oriented NDRS Efficiency	
1	A	1	DMU No.	DMU Name
2	B	1	1 A	1.00000
3	C	0.833333	2 B	1.00000
4	D	0.75	3 C	0.83333
5	E	0.8	4 D	0.75000
6	F	0.5	5 E	0.80000
7	G	0.5	6 F	0.50000
8	H	0.625	7 G	0.50000
9	AA	1	8 H	0.62500

表6〔左〕と表6〔右〕の効率値を比べると、全てのDMUの値が同値であることが分かる。従って、定理3.2は数値実験上は検証できた。

[定理3.3]

既存活動のデータ集合(X,Y)にn+1番目の活動として(0,0)を、n+2番目の活動として無限遠点(∞, ∞)を追加した新データ集合(X',Y')に対する基本BCCモデルのPPSはCCRモデルのPPSに一致する[2]。

(検証3.3-1)定理3.2通りの検証

表7：既存活動のデータ集合(X,Y)〔左〕

新データ集合(X',Y')〔右〕

DMU	(I)入力	(O)出力	DMU	(I)入力	(O)出力
A	2	1	A	2	1
B	3	3	B	3	3
C	3	2	C	3	2
D	4	3	D	4	3
E	5	4	E	5	4
F	5	2	F	5	2
G	6	3	G	6	3
H	8	5	H	8	5
			AA	0.000001	0.000001
			BB	360000	230000

既存活動のデータ集合にn+1番目の活動(0,0)としてDMU AAを、n+2番目の活動(無限遠点相当 $k=10^4$)としてDMU BBを追加したものが表7である。

表8：新データ集合のBCCモデルでの効率値〔左〕

新データ集合のCCRモデルでの効率値〔右〕

No.	DMU	Score	No.	DMU	Score
1	A	0.5	1	A	0.5
2	B	1	2	B	1
3	C	0.666667	3	C	0.666667
4	D	0.75	4	D	0.75
5	E	0.913045	5	E	0.8
6	F	0.4	6	F	0.4
7	G	0.5	7	G	0.5
8	H	0.766306	8	H	0.625
9	AA	1	9	AA	1
10	BB	1	10	BB	1

表8〔左〕と表8〔右〕の効率値を比べると、全てのDMUの値は同値ではなく、DMU E,Hに大きな誤差が出た。従って、この場合については定理3.2は成立しているとは言えない。

ここで、先程と同様の手法でn+2番目の付加方法を変えて再度検証を行なった。

(検証3.3-2)新しい付加方法

表9：既存活動のデータ集合(X,Y)〔左〕

新データ集合(X',Y')〔右〕

DMU	(I)入力	(O)出力	DMU	(I)入力	(O)出力
A	2	1	A	2	1
B	3	3	B	3	3
C	3	2	C	3	2
D	4	3	D	4	3
E	5	4	E	5	4
F	5	2	F	5	2
G	6	3	G	6	3
H	8	5	H	8	5
			AA	0.00001	0.00001
			BB	999999	999999

既存活動のデータ集合にn+1番目の活動(0,0)としてDMU AAを、n+2番目の活動(入力対出力が1対1)としてDMU BBを追加したものが表9である。

表10：新データ集合のBCCモデルでの効率値〔左〕

新データ集合のCCRモデルでの効率値〔右〕

No.	DMU	Score	No.	DMU	Score
1	A	0.5	1	A	0.5
2	B	1	2	B	1
3	C	0.666667	3	C	0.666667
4	D	0.75	4	D	0.75
5	E	0.8	5	E	0.8
6	F	0.4	6	F	0.4
7	G	0.5	7	G	0.5
8	H	0.625	8	H	0.625
9	AA	1	9	AA	1
10	BB	1	10	BB	1

表10〔左〕と表10〔右〕の効率値を比べると、全てのDMUの値が同値であることが分かる。従って、定理3.2は数値実験上は検証できた。

4. IRS モデルの考察実験

[定理3.2]は、上記計算(検証3.2-1)では一致しなかった。そこで、 $n+1$ 番目の活動の無限遠点を拡大していき、誤差がなくなるかを検証した。無限遠点は表計算上可能な限り大きくし、 $k=10^2$ 倍～ 10^{11} 倍まで検証した。

(検証4.1)

表11：新データ集合 $k=10^2$ 倍 [左]

新データ集合 $k=10^8$ 倍 [右]

DMU	(I)入力	(O)出力	DMU	(I)入力	(O)出力
A	2	1	A	2	1
B	3	3	B	3	3
C	3	2	C	3	2
D	4	3	D	4	3
E	5	4	E	5	4
F	5	2	F	5	2
G	6	3	G	6	3
H	8	5	H	8	5
BB	3600	2300	BB	3600000000	2300000000

既存活動のデータ集合に $n+1$ 番目の活動(無限遠点相当 $k=10^2$ 倍, 10^8 倍)として、DMU BBを追加したものが表11である。

表12： 10^2 倍BCCモデルでの効率値 [左]

10^8 倍BCCモデルでの効率値 [右]

No.	DMU	Score	No.	DMU	Score
1	A	1	1	A	1
2	B	1	2	B	1
3	C	0.833333	3	C	0.833333
4	D	0.75	4	D	0.75
5	E	0.913191	5	E	0.913043
6	F	0.5	6	F	0.5
7	G	0.5	7	G	0.5
8	H	0.766489	8	H	0.766304
9	BB	1	9	BB	1

表13：IRSモデルでの効率値

DMU No.	DMU Name	Input-Oriented NDRS Efficiency
1	A	1.00000
2	B	1.00000
3	C	0.83333
4	D	0.75000
5	E	0.80000
6	F	0.50000
7	G	0.50000
8	H	0.62500

表12 [左]、[右] と表13の計算結果を比べると、DMU E,Hに大きな誤差が出たが、 $n+1$ 番目の活動を $k=10^2$ 倍から $k=10^8$ 倍にしたことで、DMU

E,Hの値がLP解に近づいている。 $k=10^{11}$ 倍まで検証したが、DMU Eの値に関しては、 10^{10} 倍から 10^{11} 倍においての値の差が各々 10^{-12} と限りなく0に近くなり、今後 k を無限に増大していてもLP解に達するかどうかは不明であるが、近づいていることは確かである。また、DMU Hの値についても同様のことが言える。

5. おわりに

今回の論文では、前回の論文[2]で証明した定理を、数値計算実験でも成立することを検証した。活動(0,0)を付加した場合は容易に検証できたが、活動(∞, ∞)を付加した場合は無限大値の数値表現が必ずしも十分でなく検証可能なケースと不可なケースが存在した。

活動(∞, ∞)付加における適切な数値表現、1入力1出力だけでなく、2入力2出力等でも行なうこと等々が今後の課題である。

参考文献

- [1]刀根薫：経営効率性の測定と改善～包絡分析法DEAによる～、日科技連(1993)
- [2]吉村彩・大澤慶吉・篠原正明：凸包モデルの生産可能集合の解釈と一般化、第40回日本大学生産工学部 学術講演会 数理情報部会 講演概要、pp83-86(2007.12)
- [3]Cooper,W.W.,Seiford,L.M.and Tone,K：Data Envelopment Analysis .A Computer Text with Models,Applicatiobns,References and DEA-Solver Soft-ware,Kluwer Academic Publishers,Massachusetts,(2000)
- [4]Joe Zhu：Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking Data Envelopment Analysis with Spreadsheets and DEA Excel Solver, ,Kluwer Academic Publishers(2003)