

メール数変化時スパム逆推定確率のベイズ更新式

日大生産工(院) ○島崎 啓知

日大生産工 篠原 正明

1 はじめに

特定の単語（あるいは一般化して属性）が到来メールに含まれる時に、そのメールが迷惑メール（spam）である逆推定確率をベイズ公式により、注目単語のスパム度を計測する。

メール数が変化した時に、スパム逆推定確率をベイズ定理に基づき更新する公式を導出した。さらに、原因がM個で、かつ、標本集合がN個の場合の「目標 - 評価基準 - 代替案」の3段AHP図式における逆推定確率の統合式へ一般化する。なお、更新式ならびに統合式においては、逆推定確率の逆数で表現すると公式が単純化でき、その意味も明確になるため、逆推定確率の逆数の意味についても考察する。

2 スパム判定のベイズ流AHP図式での更新式

メールが迷惑メール（spam）か、通常メール（ham）かを原因事象S（spam）、H（ham）とし、AHP図式を図1に示す。

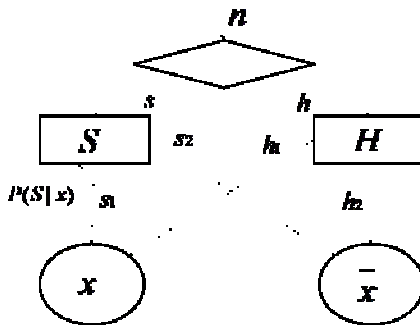


図 1 スパム判定のAHP図式

n個のメールが到来し、その内でs個を迷惑メール、h個を通常メールと判定した。

s個の迷惑メール中でs₁個は属性xを含み、s₂個は含まない。又、h個の通常メール中でh₁個は属性xを含み、h₂個は含まない。以上のメール頻度数を、図1中に表記した。

この時点におけるスパム逆推定確率をP_{old}(S|x)とする。次に、到来メール数がnからn + Δnへと増加し、同様に、s → s + Δs、h → h + Δh、s₁ → s₁ + Δs₁、s₂ → s₂ + Δs₂、h₁ → h₁ + Δh₁、h₂ → h₂ + Δh₂と変化した場合におけるスパム逆推定確率をP_{new}(S|x)とする。すると、P_{old}(S|x)、P_{new}(S|x)は次の更新式(1)により関係づけられる。

[定理 1]

$$\frac{P_{new}(S|x)^{-1}}{= rP_{old}(S|x)^{-1} + (1-r)\Delta P(S|x)^{-1}} \quad \dots (1)$$

但し、

$$r = s_1 / (s_1 + \Delta s_1) \quad (\Delta s_1 \neq 0 \text{を仮定}) \quad \dots (2)$$

rは増加後迷惑メール中で属性xを含むメール中でのメール数増加以前の割合であり、従って、(1-r)はメール数増加後の割合である。又、ΔP(S|x)は、後から到着した変分メール数(Δn、Δs、Δh、Δs₁、Δs₂、Δh₁、Δh₂)に対するスパム逆推定確率である。

[証明略]

ここで(1)式におけるP_{new}、P_{old}、ΔPの逆数をR_{new}、R_{old}、ΔRとするならば、更新式(1)は次式となる。

$$\frac{R_{new}(S|x)}{= rR_{old}(S|x) + (1-r)\Delta R(S|x)} \quad \dots (3)$$

Updating Formulae for Bayesian Spam Estimation Probability
when Number of Arriving Mails Changes

Hiroshi SHIMAZAKI and Masaaki SHINOHARA

[例題1] $n = 100$ 、 $s = 60$ 、 $h = 40$ 、
 $s_1 = 50$ 、 $s_2 = 10$ 、 $h_1 = 10$ 、 $h_2 = 30$ 、
 $\Delta n = 10$ 、 $\Delta s = 5$ 、 $\Delta h = 5$ 、 $\Delta s_1 = 1$ 、 $\Delta s_2 = 4$ 、
 $\Delta h_1 = 4$ 、 $\Delta h_2 = 1$ とすると、
 $r = 50 / 51$ 、 $R_{old} = 6 / 5$ 、 $\Delta R = 5$ となり、
 $R_{new} = 65 / 51$ 、すなわち、
 $P_{new}(S|x) = 51 / 65$ となる。(例題終)

[例題2] 例題1にて「 $\Delta s_1 = 0$ 、 $\Delta s_2 = 5$ 」の
 みを変更して、残りのデータは同じとする。
 すると、 $\Delta s_1 = 0$ なので、 $r = 1$ 、
 $(1-r) = 0$ となるが、 $\Delta P = 0$ なので、
 $\Delta R = \infty$ となり、(3)式右边第2項は本来の定
 義式に戻り、次式で計算する。

$$(1-r)\Delta R(S|x) = \Delta h_1/s_1 \quad \cdots (4)$$

すると、 $(1-r)\Delta R(S|x) = 4/50$ となり、
 $R_{new} = 6 / 5 + 4 / 50 = 32 / 25$ 、すなわ
 ち、 $P_{new}(S|x) = 25 / 32$ となる。(例題終)

3 一般化

図1のAHP図式をM個の原因事象
 $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_M\}$ 、さらに、N個のメー
 ル頻度数標本集合
 $\{n(k), a_1(k), a_2(k), \dots, a_i(k), \dots, a_M(k),$
 $\{x_1(k), x_2(k), \dots, x_i(k), \dots, x_M(k) : k = 1, \dots, N\}$
 へと一般化したAHP図式を図2に示す。但し、
 結果事象は「属性xを含む」のみとした。

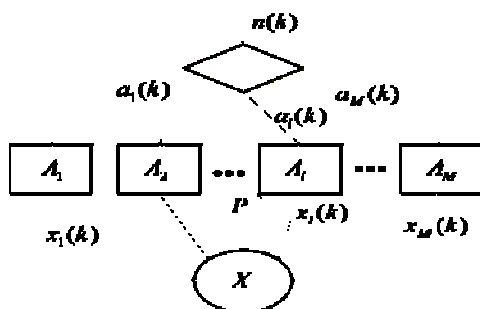


図 2 一般化した標本集合kに対するAHP図式 (但し、 $k=1, \dots, N$)

図2では原因事象がM個存在するが、図1では迷惑メールと通常メールで $M=2$ であった場合を一般化した。例えば、仕事用メール、友達間メール、娯楽関係メール、スポーツ間メール、趣味間メールなどと、メールの自動分類を想定する。

又、図1では標本集合として基準となる標本集合 $\{n, s, h, s_1, s_2, h_1, h_2\}$ と変化分の標本集合

$\{\Delta n, \Delta s, \Delta h, \Delta s_1, \Delta s_2, \Delta h_1, \Delta h_2\}$ の $N = 2$ であった場合を、図2では一般化した。異時間帯ならびに複数箇所で集めたデータを集計する場合を想定する。

属性xを含む時に原因が A_i がある逆推定確率を $P(A_i|x)$ と記述すると、標本集合kの逆推定確率 P_k と全標本に対する逆推定確率 P_{sum} は次の関係式(5)により関係づけられる。

[定理2]

$$P_{sum}(A_i|x)^{-1} = \sum_{k=1}^N r(i,k) P_k(A_i|x)^{-1} \quad \cdots (5)$$

但し、

$$r(i,k) = x_i(k) / \sum_{t=1}^N x_i(t) \quad \cdots (6)$$

[証明略]

ここで、(5)式における P_{sum} 、 P_k の逆数を R_{sum} 、 R_k とすれば、次式となる。

$$R_{sum}(A_i|x) = \sum_{k=1}^N r(i,k) R_k(A_i|x) \quad \cdots (7)$$

4 確率の逆数

当選確率Pの抽選において、Pの逆数は当選倍率 $R = P^{-1}$ となる。信念(belief)を表わす主観確率においても、その逆数は主観倍率を表わすと解釈できる。例えば、スパム逆推定倍率 $P(S|x) = 0.5$ は、スパム逆推定確率 $R(S|x) = 2$ となり、平均的にメール数2個到来時に1つのスパムメールが混在することを意味する。

5 おわりに

標準的なAHP図式(確率遷移図)の場合において、データ数が変動した時のベイズ流逆推定確率の更新式を与えた(定理1)。又、その更新式を原因数=M、標本集合数=Nの場合に一般化した(定理2)。

さらに、より一般的なAHP図式(文献[1]などでのパス型ベイズ定理、多段ベイズ定理、ネットワーク型ベイズ定理、等)での更新式については、今後の課題である。

「参考文献」

[1] 篠原正明：ベイズの定理とマルコフ連鎖と枝確率フロー平衡、第36回日本大学生産工学術講演会数理情報部会論文集、7-17、pp.41-44(2003.12)。