

非協力 2 人零和行列ゲームが支配戦略を持つための利得関数の条件

日大生産工 篠原 正明

日大生産工(院) ○鈴木 伸典

1 . はじめに

いかなる非協力 2 人零和行列ゲーム、さらには非協力 2 人非零和行列ゲームについても、戦略を純粋戦略に限定せず、混合戦略をも考慮すれば、相互に最適反応戦略となる均衡点が少なくとも 1 つ存在する。ところで、最適反応戦略の特別な場合として支配戦略が存在するが、本論文では零和行列ゲームの場合について、均衡点が純粋支配戦略対から構成されるために利得行列が満足すべき条件について、その行列要素を定義する利得関数の概念を導入し、その利得関数の満足すべき関数形として考察する。

なお、支配戦略の定義、ミニマキシ純粋戦略(鞍点)の定義については付録 1 を、支配戦略、反復支配戦略、ミニマキシ純粋戦略(鞍点)、ミニマキシ混合戦略、最適反応戦略の包含関係については付録 2 を参照のこと。

2 . 用語などの定義

$G = \{ g_{ij} \}$: 最大化プレイヤーの $m \times n$ 利得行列(あるいは、最小化プレイヤーの損失行列) すなわち、 g_{ij} は最大化プレイヤーが戦略 i 、最小化プレイヤーが戦略 j をとった時の、最大化プレイヤーの利得(あるいは、最小化プレイヤーの損失)。

$A = \{ a_i \}$: a_i (i 行特性値 ; $i=1, \dots, m$) を要素とする集合。 a_i は最大化プレイヤーの戦略 i に付随した値と考える。

$B = \{ b_j \}$: b_j (j 列特性値 ; $j=1, \dots, n$) を要素とする集合。 b_j は最小化プレイヤーの戦略 j に付随した値と考える。

3 . 利得行列の構造についての仮定

本論文においては、 $g_{ij} = f(a_i, b_j)$ を仮定する。すなわち、利得行列 G の (i, j) 要素 g_{ij} が i 行特性値 a_i と j 列特性値 b_j の関数で与えられる場合に限定して、関数 $f(x, y)$ がどのようなタイプのときに、(純粋)支配戦略対を持つかを考察する。

4 . 関数 $f(x, y)$ の簡単な例

以下に、支配戦略対を持つ関数形の簡単な例を示す。

[関数例 1...和] $f(x, y) = x + y$, x と y は実数。

[関数例 2...積] $f(x, y) = x \cdot y$, x と y は正実数。

(行列例 1...和) $f(x, y) = x + y$ で、 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ とすると、利得行列 G は (1) 式となる。

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

最大化プレイヤーは $i=3$ が、最小化プレイヤーは $j=1$ が支配戦略で、ゲーム値 = 2。 $i^* =$

$\arg \max_k \{a_k\}$, $j^* = \arg \min_k \{b_k\}$ が、各々最

大化、最小化プレイヤーの支配戦略対である。

Conditions of Zero-sum Game Payoff Matrix for having Dominant Strategies

Masaaki SHINOHARA and Shinsuke SUZUKI

(行列例 2・・・積) $f(x,y)=x \cdot y$ で、 $A=\{1,2,3\}, B=\{4,5\}$ とすると、利得行列 G は (2) 式となる。

$$G = \begin{pmatrix} 4, & 5 \\ 8, & 10 \\ & ,15 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$i=3$ が最大化プレイヤーの、 $j=1$ が最小化プレイヤーの支配戦略で、ゲーム値 = 12。

$i^* = \arg \max_k \{a_k\}$, $j^* = \arg \min_k \{b_k\}$ が、行列

例 1 と同様に、各々最大化、最小化プレイヤーの支配戦略対である。

さて、以上の 2 つの簡単な関数例「和」,「積」以外に、純粋支配戦略を持つ関数形は存在しないだろうか？以下に示す p 乗形一般化平均がその 1 つである。

[関数例 3・・・ p 乗形一般化平均]

$$f(x,y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x \text{ と } y \text{ は正実数。}$$

$p=1$ で関数例 1 の和関数、 $p \rightarrow 0$ で関数例 2 の積関数(の平方根)に帰着されるので、関数例 3「 p 乗形一般化平均」は、関数例 1, 2 の一般化である。

(行列例 3・・・最大値) $p \rightarrow +\infty$ では、 $f(x,y)=\max\{x,y\}$ となり、行列例 2 と同様に $A=\{1,2,3\}, B=\{4,5\}$ とすれば、利得行列 G は (3) 式となる。

$$G = \begin{pmatrix} & 5 \\ & 5 \\ & 5 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$i=3$ が最大化プレイヤー、 $j=1$ が最小化プレイヤーの支配戦略対の 1 つである。この例では、 $i=1$ と $i=2$ も最大化プレイヤーの支配戦略である。 $i^* = \arg \max_k \{a_k\}$, $j^* = \arg \min_k \{b_k\}$

が、各々最大化、最小化プレイヤーの支配戦略対である。

(行列例 4・・・最小値) $p \rightarrow -\infty$ では、 $f(x,y)=\min\{x,y\}$ となり、行列例 2 と同様に $A=\{1,2,3\}, B=\{4,5\}$ とすれば、利得行列 G は (4) 式となる。

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$i=3$ が最大化プレイヤー、 $j=1$ が最小化プレイヤーの支配戦略対の 1 つである。この例では、 $j=2$ も最小化プレイヤーの支配戦略である。

$i^* = \arg \max_k \{a_k\}$, $j^* = \arg \min_k \{b_k\}$ が、各々

最大化、最小化プレイヤーの支配戦略対である。

5. 一般化条件の考察

4 章の考察では、個別の 3 つの関数形について検討したが、より一般的に純粋支配戦略対を持つ条件を以下に考察する。

[一般化条件 1]

ある $\beta \in B$ 、任意 $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ について、もし $f(\alpha_1, \beta) > f(\alpha_2, \beta)$ ならば、他の任意 $\beta' \in B - \beta$ に対しても、 $f(\alpha_1, \beta') > f(\alpha_2, \beta')$ が成立し、かつ同時に、

「ある $\alpha \in A$ 、任意 $\beta_1, \beta_2 \in B$ について、もし $f(\alpha, \beta_1) > f(\alpha, \beta_2)$ ならば、他の任意 $\alpha' \in A - \alpha$ に対しても、 $f(\alpha', \beta_1) > f(\alpha', \beta_2)$ が成立する」ような関数 $f(x,y)$ により $G = \{g_{ij}\}$ の (i,j) 要素が、 $g_{ij} = f(a_i, b_j)$ と構成される時に G を利得行列とする

零和行列ゲームは純粋支配戦略対を持つ。ここで、最大化プレイヤー、最小化プレイヤーの支配戦略 i^*, j^* は各々以下で与えられる。

$$i^* = \arg \max_{k=1, \dots, m} f(a_k, \beta) \quad \text{for any } \beta \in B \quad (5)$$

$$j^* = \arg \min_{k=1, \dots, n} f(\alpha, b_k) \quad \text{for any } \alpha \in A \quad (6)$$

ところで、一般化条件 1 は、 $f(x, y)$ に対して、 f_x と f_y が x, y にかかわらず正値か負値の定まった値をとれば、満たされる。すなわち、以下の場合には 1 つの十分条件の具体的表現である。

すなわち、一般化条件 1 を偏導関数 $f_x(x, y)$ 、 $f_y(x, y)$ で表現すると以下の通りである。

- 「 $f_x > 0, f_y > 0$ 」あるいは
- 「 $f_x > 0, f_y < 0$ 」あるいは
- 「 $f_x < 0, f_y > 0$ 」あるいは
- 「 $f_x < 0, f_y < 0$ 」が成立すること。

4 章の関数例 1 (和)「 $f(x, y) = x + y$ 」では、 $f_x = 1, f_y = 1$ で、 $f_x > 0, f_y > 0$ が成立しており、関数例 2 (積)「 $f(x, y) = x \cdot y$ 」では、 $f_x = y, f_y = x$ で、 $x > 0, y > 0$ の範囲では、 $f_x > 0, f_y > 0$ が成立している。関数例 3 (p 乗形一般化平均)でも、 $x > 0, y > 0$ の範囲では、 $p \rightarrow +\infty$ と $p \rightarrow -\infty$ の両極限を除いては、 $f_x > 0, f_y > 0$ が成立している。関数例 3 の行列例 3 と 4 では、最大値と最小値の両極限で、「一般化条件 1」の記述の一部の厳密な不等号 ($>$ あるいは $<$) が等号付不等号 (あるいは $\geq$ あるいは $\leq$) に置換されるため、複数の純粋支配戦略対が生じた。以上の例は、 $A = \{a_i\}$ と $B = \{b_j\}$ の各要素を A と B の中で昇順あるいは降順に再整列すると、丁度、利得行列の 4 隅のどこかが純粋支配戦略対となる場合である。

一般化条件 1 は、純粋支配戦略対のための

1 つの条件であるが、より厳しい条件として、以下の一般化条件 2 を考える。

図 1 において、一般化条件 2 は、最大化プレイヤー、最小化プレイヤーの(純粋支配)戦略を、各々 i^*, j^* とした時に、第 i^* 行と第 j^* 列のみについて一般化条件 1 の条件を成立することを要求した場合であり、支配戦略対よりも厳しい条件を満たすミニマキシ純粋戦略対(鞍点)の条件となる。

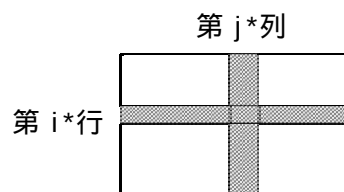


図 1：一般化条件 2 の説明図

[一般化条件 2]

ある $\alpha_0 \in A$ とある $\beta_0 \in B$ に対して、任意 $\alpha' \in A - \alpha_0$ に対して、 $f(\alpha_0, \beta_0) > f(\alpha', \beta_0)$ 、かつ、任意 $\beta' \in B - \beta_0$ に対して、 $f(\alpha_0, \beta_0) < f(\alpha_0, \beta')$ が成立すること(但し、 $a_{i^*} = \alpha_0$ 、 $b_{j^*} = \beta_0$)。

6. おわりに

非協力 2 人零和行列ゲームが純粋支配戦略を持つための条件を、利得行列の (i, j) 要素が第 i 行特性値と第 j 列特性値の関数で与えられる場合について考察し、十分条件として一般化条件 1 を与えた。4 章の関数例については、この一般化条件 1 ですべて説明できる。また、支配戦略は利得行列に対する概念であり、その意味では、零和、非零和ゲームとは関係なく、個々の利得行列について成立する。さらに、別の条件として一般化条件 2 を与えたが、これはミニマキシ純粋戦略対(鞍点)の条件であり、この場合の利得関数の考察は今後の課題である。ネットオークション入札メカニズム・アル

ゴリズム設計では、2 人の入札プレイヤーの対応する非零和行列ゲームモデルが支配戦略対を持つことが安定したネットオークション入札メカニズムの設計には肝要であると考えられており、本結果を非零和行列ゲームへ拡張することにより、安心感のあるネットオークション入札メカニズムの設計条件を解明したい。一般化条件 1 と 2 の間の条件、偏導関数による十分条件の新たな具体的表現、利得行列の (i, j) 要素が第 i 行特性値と第 j 列特性値の関数以外の場合、等々も今後の課題である。

参考文献

[1]鈴木伸典、篠原正明：ネットオークションのゲーム理論的分析、平成 19 年度日本大学生産工学部第 40 回学術講演会・数理情報部会講演論文集，pp.43-46(2007.12)。

付録 1：支配戦略、ミニマキシ純粋戦略(鞍点)の定義

支配戦略の定義：2 人零和行列ゲーム $G = \{g_{ij}\}$ において、最大化(行)プレイヤーの強支配戦略が i^* 、最小化(列)プレイヤーの強支配戦略が j^* 、とは、行列 G の第 i 行ベクトル、第 j 列ベクトルをそれぞれ $g_{i\cdot}, g_{\cdot j}$ とすると

$$g_{i^*\cdot} > g_{i\cdot} \quad \text{for all } i \neq i^* \quad (\text{A1.1})$$

$$g_{\cdot j^*} < g_{\cdot j} \quad \text{for all } j \neq j^* \quad (\text{A1.2})$$

が成立することである。弱支配戦略の場合は、不等号($>$ あるいは $<$)を等号付不等号にすればよい。

ミニマキシ純粋戦略(鞍点)の定義：2 人零和行列ゲーム $G = \{g_{ij}\}$ において、最大化(行)

プレイヤーの戦略 i^* 、最小化(列)プレイヤーの戦略が j^* が鞍点とは、

$$g_{ij^*} \leq g_{i^*j^*} \leq g_{i^*j} \quad \text{for all } i \neq i^* \text{ and } j \neq j^* \quad (\text{A1.3})$$

が成立することである。この場合には、行ベクトル、列ベクトルを用いた定義は出来ないほど、ミニマキシ純粋戦略対は支配戦略対より複雑な概念であることがわかる。

付録 2：支配戦略、反復支配戦略、ミニマキシ純粋戦略(鞍点)、ミニマキシ混合戦略、最適反応戦略の包含関係

零和行列ゲームと非零和行列ゲームの二つのクラスに留意しながら、上記の戦略(対)概念の包含関係を図 A2.1 に示す。ここで、ミニマキシ戦略の概念は零和行列ゲームにおいてのみ有効で、また、例えば、零和行列ゲームと非零和行列ゲームの両クラスにおいて、支配戦略が最適反応戦略に包含されているのは、「支配戦略なら最適反応戦略」であるが、その逆の「最適反応戦略なら支配戦略」は必ずしも成立しない。

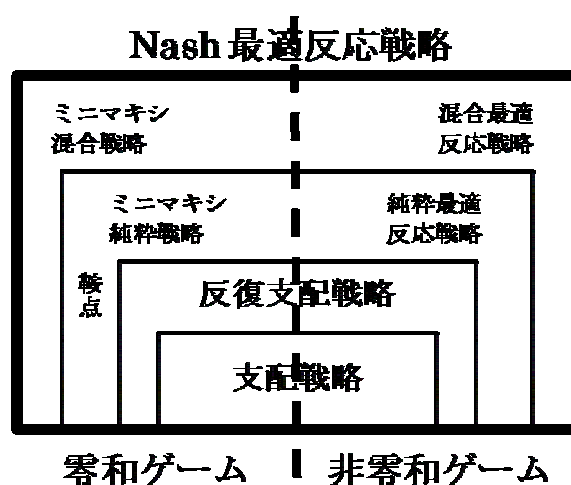


図 A2.1：各種戦略の包含関係