対基底の理論と応用(その1)

—強相補性—

日大生産工　　◯篠原　正明
情報システム研究所　　篠原　健

1. はじめに

線形計画法(LP:Linear Programming)における対基底概念(pair-of-bases concept,あるいはconcept of dual basis)に関連して、LP問題が退化している時には対基底概念で関係づけられる主問題と双対問題の基底解の対の間に強相補性が成立しない点を指摘すると共に、どのような主問題と双対問題の解の間に強相補性が成立するかを考察する。

2. 対基底概念とは（[1],[2],[3]）

$\mathbf{A}$ を $m \times n$ 行列とする時に、不等式体系の主LP問題「$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \to \max; \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$」と双対LP問題「$w = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \to \min; \mathbf{A}^T \mathbf{y} \geqq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$」は各々等しい数の基底を持ち、その総数は $C(m+n,m) = C(m+n,n)$ である。

主LP問題の各基底と双対LP問題の各基底の間には、「一対の基底」の一対一対応関係が存在する。すなわち、等式体系主LP問題の変数を $\mathbf{x}_E$、等式体系双対LP問題の変数を $\mathbf{y}_E$ とし、$\mathbf{x}_E$ と $\mathbf{y}_E$ は共に $(m+n)$ 列ベクトルである。不等式体系を等式体系に変換する際のスラック変数を介して、$\mathbf{x}_E$ の各要素と $\mathbf{y}_E$ の各要素を対応づける。

今、$\mathbf{x}_E$ と $\mathbf{y}_E$ が対基底の関係にある基底解であるとするならば、内積 $(\mathbf{x}_E, \mathbf{y}_E) = 0$ で相補性が成立している。又、$\mathbf{x}_E$ の第i要素が主LP問題の基底(非基底)変数なら、$\mathbf{y}_E$ の第i要素は双対LP問題の非基底(基底)変数であり、逆も成立する。さらに、$\mathbf{x}_E$ に対する主LP問題の主(双対)実行可能条件は、$\mathbf{y}_E$ に対する双対LP問題の双対(主)実行可能条件に等価である。すなわち、主LP問題のある基底解について主(双対)実行可能条件が成立していれば、双対LP問題の対応する基底(対基底)解については双対(主)実行可能条件が成立する。

さらに、対基底の関係にある各基底解の目的関数値は等しい。この「対基底目的関数同値定理」と弱双対定理より、LP問題において双対実行可能条件を満足する基底は、最適基底を通過する目的関数値一定の超平面の実行可能領域が存在する側の反対側に存在するというLemke(1954)の定理も容易に導出できる。従って、「対基底目的関数同値定理」は対基底概念を採用することにより得られた、より一般的定理である。

3. 弱相補性を強相補性（[4],[5]などの付録参照）

「相補性の強定理」あるいは「強相補性」を説明する前に「強」のつかない普通の「相補性(弱相補性とも言う)」について説明する。

〔相補性定理〕

主LP問題の主実行可能解 $\mathbf{x}_E\,(\geqq 0)$ と双対LP問題の主実行可能解 $\mathbf{y}_E\,(\geqq 0)$ が、内積 $(\mathbf{x}_E, \mathbf{y}_E) = 0$ を満たすとき、かつそのときのみ、$\mathbf{x}_E$ は主問題の、$\mathbf{y}_E$ は双対問題の最適解である。□(ここでは基底解に限定されない)

相補性とは、$\mathbf{x}_E$ と $\mathbf{y}_E$ 共に非負ベクトルなので、内積が0ということは、$\mathbf{x}_E$ のある要素が正なら、$\mathbf{y}_E$ の対応要素は必ず零になるという性質である。

〔例1〕　$\mathbf{x}_E = (1,2,0,0)^T$、$\mathbf{y}_E = (0,0,3,4)^T$ は、内積 $(\mathbf{x}_E, \mathbf{y}_E) = 0$ であり、$\mathbf{x}_E$ と $\mathbf{y}_E$ は相補性の関係にあると言える。

〔例2〕　$\mathbf{x}_E = (0,2,0,0)^T$、$\mathbf{y}_E = (0,0,3,4)^T$ は、内積 $(\mathbf{x}_E, \mathbf{y}_E) = 0$ であり、この場合も $\mathbf{x}_E$ と $\mathbf{y}_E$ は相補性の関係にあると言える。

次に、「相補性の強定理」あるいは「強相補性定理」を説明する。

〔強相補性定理〕

主LP問題の主実行可能解 $\mathbf{x}_E\,(\geqq 0)$ と双対LP問題の主実行可能解 $\mathbf{y}_E\,(\geqq 0)$ が、内積 $(\mathbf{x}_E, \mathbf{y}_E) = 0$ を満たすとき、かつそのときのみ、$\mathbf{x}_E$ は主問題の、$\mathbf{y}_E$ は双対問題の最適解

Theory of Dual Basis in Linear Programming and Its Application
—Part 1: Strong Complementarity—

Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

であるが(以上は、相補性定理)、その最適解の中には、$\mathbf{x}_E$ あるいは $\mathbf{y}_E$ のある要素が0ならば、他方の対応要素は必ず正になるもの(最適解 $\mathbf{x}_E$ と $\mathbf{y}_E$)が存在する。□(ここでも基底解に限定されない)

〔例3〕　例1の $\mathbf{x}_E=(1,2,0,0)^T$ 、$\mathbf{y}_E=(0,0,3,4)^T$ は、相補性のみならず強相補正の関係にあるが、例2の $\mathbf{x}_E=(0,2,0,0)^T$ 、$\mathbf{y}_E=(0,0,3,4)^T$ は、相補性の関係ではあるが、$\mathbf{x}_E$ と $\mathbf{y}_E$ の第1要素に注目すると、強相補性の関係ではないと言える。

4. 対基底と相補性

〔定理1〕

$\mathbf{x}_E$ と $\mathbf{y}_E$ を対基底の関係にある基底解とするならば、内積 $(\mathbf{x}_E,\mathbf{y}_E)=0$ で、相補性が成立する。但し、$\mathbf{x}_E$ と $\mathbf{y}_E$ は主双対実行可能条件を充足/非充足にかかわらず、任意の対基底である。□

3章の「相補性定理」は、主実行可能条件を満足する解 $(\mathbf{x}_E \geqq 0, \mathbf{y}_E \geqq 0)$ についての性質であり、基底解に限定していない。一方、上記の定理1は任意の対基底の基底解 $\mathbf{x}_E$ 、$\mathbf{y}_E$ についてその内積 $(\mathbf{x}_E,\mathbf{y}_E)=0$ を主張する。なお、3章の「相補性定理」における「解」を「基底解」を言い直した次の定理2も成立する。

〔定理2〕

主LP問題の主実行可能基底解 $\mathbf{x}_E(\geqq 0)$ と双対LP問題の主実行可能基底解 $\mathbf{y}_E(\geqq 0)$ が、内積 $(\mathbf{x}_E,\mathbf{y}_E)=0$ を満たすとき、かつそのときのみ、$\mathbf{x}_E$ は主問題の、$\mathbf{y}_E$ は双対問題の最適基底解である。□

3章の「相補性定理」の「解」の中には「基底解」と「非基底解」が含まれており、基底解のみに限定すれば定理2が得られる。また、単体法アルゴリズムにより得られる解は定理2の基底解である。

ところで、定理1より、対基底の基底解は内積 $(\mathbf{x}_E,\mathbf{y}_E)=0$ なので、定理2において、対基底の関係にある主LP問題の主実行可能基底解と双対LP問題の主実行可能基底解を選べば、定理2の主張は成立するが、それ以外の可能性を示唆している。又、非基底解のみに限定すれば定理3が得られる。

〔定理3〕

主LP問題の主実行可能非基底解 $\mathbf{x}_E(\geqq 0)$ と双対LP問題の主実行可能非基底解 $\mathbf{y}_E(\geqq 0)$ が、内積 $(\mathbf{x}_E,\mathbf{y}_E)=0$ を満たすとき、かつそのときのみ、$\mathbf{x}_E$ は主問題の、$\mathbf{y}_E$ は双対問題の最適非基底解である。□

なお、同様の論理により、相補性定理の解 $\mathbf{x}_E$ 、$\mathbf{y}_E$ を適当に特徴づけることにより、特徴づけられた下での相補性定理を得る。その1つとして、次の定理4を示す。

〔定理4〕

主LP問題の主実行可能基底解 $\mathbf{x}_E(\geqq 0)$ と双対LP問題の主実行可能<u>非基底解</u> $\mathbf{y}_E(\geqq 0)$ が、内積 $(\mathbf{x}_E,\mathbf{y}_E)=0$ を満たすとき、かつそのときのみ、$\mathbf{x}_E$ は主問題の最適基底解、$\mathbf{y}_E$ は双対問題の最適<u>非基底解</u>である。□

5. 対基底と強相補性

主LP問題の基底解 $\mathbf{x}_E$ を基底変数 $\mathbf{x}_B$ と非基底変数 $\mathbf{x}_N$ に、双対LP問題の基底解 $\mathbf{y}_E$ を基底変数 $\mathbf{y}_B$ と非基底変数 $\mathbf{y}_N$ に分けて表示する。

$$\mathbf{x}_E=(\mathbf{x}_B;\mathbf{x}_N) \tag{1}$$

$$\mathbf{y}_E=(\mathbf{y}_N;\mathbf{y}_B) \tag{2}$$

主問題が主実行可能条件・非退化とは、$\mathbf{x}_B>0$ と $(\mathbf{x}_N=0)$ で、双対問題が主実行可能条件・非退化とは、$(\mathbf{y}_N=0)$ と $\mathbf{y}_B>0$ である。すなわち、次の定理が成立する。

〔定理5〕

主問題と双対問題が共に主実行可能条件・非退化ならば、対基底の関係にある基底解 $\mathbf{x}_E$ と $\mathbf{y}_E$ は強相補性を持つ。□

基底変数 $\mathbf{x}_B$ 、$\mathbf{y}_B$ 共に注目する基底において、零要素を持たず、$\mathbf{x}_B>0$ 、$\mathbf{y}_B>0$ であるので、内積 $(\mathbf{x}_E,\mathbf{y}_E)=0$ でかつ、$\mathbf{x}_N(=0)$ には $\mathbf{y}_B(>0)$ が対応し、$\mathbf{y}_N(=0)$ には $\mathbf{x}_B(>0)$ が対応するので弱相補性のみならず、強相補性が成立する。

主問題と双対問題の対基底において、非退化仮定が成立しない時は次の定理が成立する。

〔定理6〕

主問題あるいは双対問題、あるいは両問題において主実行可能条件・退化が生じている場合には、対基底の関係にある基底解 $\mathbf{x}_E$ と $\mathbf{y}_E$ は弱相補性を持つが、強相補性は持たない。□

退化が生じているという事は $\mathbf{x}_B>0$ あるいは $\mathbf{y}_B>0$ が

成立せず、$\mathbf{x}_B$、$\mathbf{y}_B$ のいずれかの要素に零値が存在する場合であり、内積$\left(\boldsymbol{x}_E, \boldsymbol{y}_E\right)=0$ となるが、$\mathbf{x}_N(=0)$に対応する$\mathbf{y}_B$ あるいは$\mathbf{y}_N(=0)$に対応する$\mathbf{x}_B$ の全要素が正とは保証されないので強相補性は成立しない。3章の強相補性と5章の定理6より、以下の定理7を得る。

〔定理7〕

主問題あるいは双対問題、あるいは両問題において主実行可能条件・退化が生じている場合には、強相補性を満たす最適解$\mathbf{x}_E$ と$\mathbf{y}_E$ は、対基底の関係にある基底解以外に存在する。□

強相補性定理より、強相補性を持つ最適解の対$\left(\mathbf{x}_E と \mathbf{y}_E\right)$が存在することは保証されているが、それは対基底の関係にある基底解でないならば、果たしてどのような最適解の対$\left(\mathbf{x}_E と \mathbf{y}_E\right)$が退化時に強相補性を満足するのであろうか？――次章ではこの課題を検討する。

6. 退化時の強相補性定理

以下に2つの例により、退化時に強相補性を持つ解の対について論じる。例4は最適値での退化時に強相補性を持つ解の対、例5は非最適値での退化時に強相補性を持つ解の対についてである。

〔例4〕

以下の主問題PLPと双対問題DLPを考える。

PLP：

$$z=2x_1+x_2 \rightarrow \max \tag{3}$$

$$2x_1+x_2 \leqq 1 \tag{4}$$

$$x_1+2x_2 \leqq 1 \tag{5}$$

$$x_1, x_2 \geqq 0 \tag{6}$$

DLP：

$$w=y_1+y_2 \rightarrow \min \tag{7}$$

$$2y_1+y_2 \geqq 2 \tag{8}$$

$$y_1+2y_2 \geqq 1 \tag{9}$$

$$y_1, y_2 \geqq 0 \tag{10}$$

PLPとDLPの図的表現を図1、図2に示す。図3には、PLPとDLP の主・双対図式を示す。ここで、$\boldsymbol{x}_E=\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)^T$ と、$\boldsymbol{y}_E=\left(y_1, y_2, y_3, y_4\right)^T$ は、x_1とy_3、x_2とy_4、x_3とy_1、x_4とy_2 と対応する。

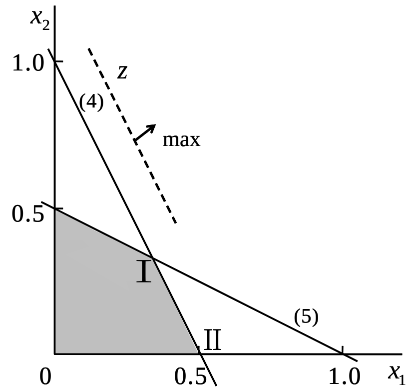

図1 主問題PLP(例4)の図的解法

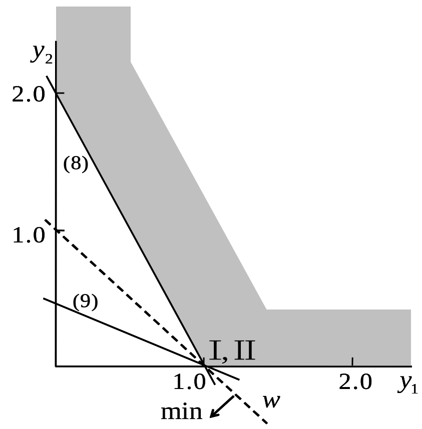

図2 双対問題DLP(例4)の図的解法

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	2	1	1	0
y_2	1	2	0	1
y_3	-1	0		
y_4	0	-1		

図3 PLPとDLP(例4)の主・双対図式

		B	B	N	N
		x_1	x_2	x_3	x_4
B	y_1	2	1	1	0
B	y_2	1	2	0	1
N	y_3	-1	0		
N	y_4	0	-1		

図4 主・双対図式(例4)における対基底P_{I}

		B	N	N	B
		x_1	x_2	x_3	x_4
B	y_1	2	1	1	0
N	y_2	1	2	0	1
N	y_3	-1	0		
B	y_4	0	-1		

図5　主･双対図式(例4)における対基底P_{II}

●対Ⅰについて…

図4に示す対基底$P_{\mathrm{I}}=\{\mathbf{x}_E(\mathrm{I}),\mathbf{y}_E(\mathrm{I})\}$を考える。すなわち、主問題PLPでは$x_1, x_2$が基底変数、$x_3, x_4$が非基底変数で、双対問題DLPでは、$y_1, y_2$が基底変数、$y_3, y_4$が非基底変数である。基底解は、図1(PLP)においては、式(4)と式(5)の交点に、図2(DLP)においては、式(8)と式(9)の交点に対応する。基底解$\mathbf{x}_E(\mathrm{I})$と$\mathbf{y}_E(\mathrm{I})$は各々次式で与えられる。

$$\mathbf{x}_E(\mathrm{I})=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=\left(1/3,1/3,0,0\right)^T \tag{11}$$

$$\mathbf{y}_E(\mathrm{I})=(y_3,y_4,y_1,y_2)^T=(0,0,1,0)^T \tag{12}$$

但し、x_iとy_iの対応関係を考慮して、$\mathbf{x}_E$と$\mathbf{y}_E$の要素を再配置した。

対基底$P_{\mathrm{I}}=\{\mathbf{x}_E(\mathrm{I}),\mathbf{y}_E(\mathrm{I})\}$においては、$\mathbf{x}_E(\mathrm{I})$と$\mathbf{y}_E(\mathrm{I})$の内積が0であり、(弱)相補性定理は成立しているが、$x_4=0$に対してDLPの基底変数y_2も０であり、強相補性定理は不成立である。

●対Ⅱについて…

図5に示す対基底$P_{\mathrm{II}}=\{\mathbf{x}_E(\mathrm{II}),\mathbf{y}_E(\mathrm{II})\}$を考える。主問題PLPでは、$x_1, x_4$が基底変数で、$x_2, x_3$が非基底変数で、双対問題DLPでは、$y_1, y_4$が基底変数で、$y_2, y_3$が非基底変数である。基底解は、図1(PLP)においては、式(4)とx_1軸$(x_2=0)$の交点、図2(DLP)では、(8)式とy_1軸$(y_2=0)$の交点に対応する。基底解$\mathbf{x}_E(\mathrm{II})$と$\mathbf{y}_E(\mathrm{II})$は各々次式で与えられる。

$$\mathbf{x}_E(\mathrm{II})=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=\left(1/2,0,0,1/2\right)^T \tag{13}$$

$$\mathbf{y}_E(\mathrm{II})=(y_3,y_4,y_1,y_2)^T=(0,0,1,0)^T \tag{14}$$

対基底$P_{\mathrm{II}}=\{\mathbf{x}_E(\mathrm{II}),\mathbf{y}_E(\mathrm{II})\}$においては、$\mathbf{x}_E(\mathrm{II})$と$\mathbf{y}_E(\mathrm{II})$の内積が0であり、弱相補性定理は成立しているが、$x_2=0$に対してDLPの基底変数$y_4$も０であり、強相補性定理は不成立である。そこで、

$$\mathbf{x}_E(\lambda)=\lambda_1\mathbf{x}_E(\mathrm{I})+\lambda_2\mathbf{x}_E(\mathrm{II}) \tag{15}$$

$$\mathbf{y}_E(\lambda)=\lambda_1\mathbf{y}_E(\mathrm{I})+\lambda_2\mathbf{y}_E(\mathrm{II}) \tag{16}$$

$$\lambda_1+\lambda_2=1,\qquad \lambda_1\geqq 0,\qquad \lambda_2\geqq 0 \tag{17}$$

で与えられる凸結合を考えると、$\mathbf{x}_E$は図1(PLP)にて、辺(Ⅰ, Ⅱ)上の点を、$\mathbf{y}_E$は図2(DLP)において、縮退点$(y_1=1, y_2=0)$に対応する。すなわち、これらの強凸結合$(\lambda_1>0,\lambda_2>0)$により得られる無限個の対$P_\lambda=\{\mathbf{x}_E(\lambda),\mathbf{y}_E(\lambda)\}$は最適値において強相補性を満足する。　〔例4終わり〕

7. おわりに

退化発生時には対基底の基底解に限定すると、弱相補性定理は成立するが、強相補性定理が不成立となる点を示し、LP問題の退化縮退点の複数の基底解に対基底・対応する双対LP問題の複数の基底解の強凸結合を考えれば、強相補性定理が成立することを示した。

一連の定理の精緻化、最適値以外への拡張、等々は今後の課題である。

参考文献

〔1〕篠原正明：線形計画の双対概念に関する若干の性質―対基底の概念、正変数等長性定理―、日本オペレーションズ・リサーチ学会　秋季研究発表論文集、pp.55-56(1973.11)

〔2〕篠原正明：LPにおける対基底概念―目的関数値、基底グラフ、ゲーム理論、DEA―、日本オペレーションズ・リサーチ学会　平成6年度組合せ最適化研究部会・研究会資料(1994.5.14、東京理科大学理工学部)

〔3〕篠原正明：上下限制約付き平均・分散ポートフェリオ配分問題の解法について、日本オペレーションズ・リサーチ学会平成6年度数理計画法研究部会・研究会資料(1994.9.17、統計数理研究所)

〔4〕刀根薫：経営効率性の測定を改善、日科技連(1993.9)

〔5〕末吉俊幸：DEA―経営効率分析法―、朝倉書店(2001.11)