モード解析における非線形性の考慮とその比較

日大生産工(学部)　○藤井　祐司
日大生産工　吉田　典正　神田　亮

1.　はじめに

モード解析は振動工学や構造力学などの分野に使われる手法であるが，現在はコンピュータグラフィックスなどにも使われるようになった[1]．

モード解析は，変位，速度，加速度などの成分をそれぞれ座標変換し，解析を行う手法である．モード解析は，質量などにより定義される物理座標系から座標変換をすることで，バネの振動を互いに独立な 1 自由度の振動系(以下，一般化座標系)に分解することができるという利点がある．

しかし，ある時刻 t から次のステップの力を計算する際に，力はバネの変位に対して非線形なため，一般化座標系上で計算することができなくなるという問題がある．

本研究ではこの問題に対して，剛性マトリックスを線形近似する手法[2]と，力を物理座標系で計算する手法[3]を比較する．そこで，布や物体の変形などのシミュレーションで頻繁に使用されるバネ‐質点モデルにモード解析を適用し，どちらがバネのシミュレーションに適しているかを比較し，結果を示す．

2.　モード解析

モード解析は非減衰系の式から固有ベクトルを計算するが，実際のシミュレーションは減衰系を使用している．以下に，減衰系は非減衰系と同様に扱えることを示す[4]．物理座標系の質量行列を $[m]$ とし，減衰行列を $[c]$，剛性マトリックスを $[k]$ とする．$\{\mathbf{x}\}$，$\{\dot{\mathbf{x}}\}$，$\{\ddot{\mathbf{x}}\}$ はそれぞれ変位ベクトルと速度ベクトル，加速度ベクトルとし，$\{\mathbf{f}_g\}$ は重力による外力とする．

$$[m]\{\ddot{\mathbf{x}}\}+[c]\{\dot{\mathbf{x}}\}+[k]\{\mathbf{x}\}=\{\mathbf{f}_g\} \quad (1)$$

ここで外力を 0 と仮定し，$\{\mathbf{x}\}$ を $\{\mathbf{u}\}e^{\omega t}$ と置き，$e^{\omega t}$ で割ると式(1)は

$$\left(\omega^2[m]+\omega[c]+[k]\right)\{\mathbf{u}\}=0 \quad (2)$$

さらに比例粘性減衰系 $[c]=\alpha[m]+\beta[k]$ を用いれば式(2)は

$$\left\{\left(\omega^2+\alpha\omega\right)[m]+\left(\beta\omega+1\right)[k]\right\}\{\mathbf{u}\}=0 \quad (3)$$

となる．次に

$$\lambda^2=-\frac{\left(\omega^2+\alpha\omega\right)}{\left(\beta\omega+1\right)} \quad (4)$$

を代入し，変形すると

$$\lambda^2[m]\{\mathbf{u}\}=[k]\{\mathbf{u}\} \quad (5)$$

となるので，式(5)は非減衰系の一般固有値問題として扱える．

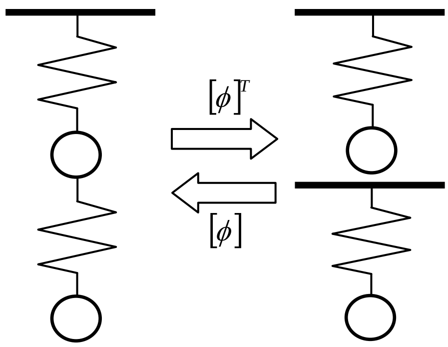
式(5)の一般固有値問題を解くことにより固有値と固有ベクトルを得られ，固有ベクトルを列成分とした固有行列 $[\phi]$ を作成する．そして，固有行列 $[\phi]$ の転置を運動方程式(1)の各項に，左から乗じることによって物理座標系から一般化座標系に変換する．

$$[\phi]^T[m]\{\ddot{\mathbf{x}}\}+[\phi]^T[c]\{\dot{\mathbf{x}}\}+[\phi]^T[k]\{\mathbf{x}\}=[\phi]^T\{\mathbf{f}_g\} \quad (6)$$

以降，アルファベットの大文字は一般化座標系を表す．一般化座標系の運動方程式の各項

Nonlinearity in Modal Analysis and its Comparison

Yuji FUJII, Norimasa YOSHIDA and Makoto KANDA



(a) 物理座標系　　(b) 一般化座標系

図１　座標変換の概念図

に固有行列$[\phi]$を左から乗じることにより，一般化座標系から物理座標系に変換する．図 1 に非減衰系における座標変換の概念図を示す．

3.　剛性マトリックスの非線形性

シミュレーションには式(7)～(9)で示す Newmarkβ法を用いて，$t+\Delta t$ステップ時の変位，速度，加速度を求める．ここでΔtは微小時間を表す．

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t}=M^{-1}\mathbf{F}_{t+\Delta t}-M^{-1}C\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t}+\mathbf{F}_g \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t}=\dot{\mathbf{X}}_t+\frac{1}{2}\left(\ddot{\mathbf{X}}_t+\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t}\right)\Delta t \quad (8)$$

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t}=\mathbf{X}_t+\dot{\mathbf{X}}_t\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{X}}_t\Delta t^2 \quad (9)$$

式(7)の力$\mathbf{F}_{t+\Delta t}$を計算するとき，変位が微小変形の範囲以外では非線形になる．これは剛性マトリックス$[k]$が幾何学的非線形だからである．

次に，剛性マトリックスの非線形性について表す．剛性マトリックス$[k]$の算出には，ひずみエネルギーの式

$$E=\frac{1}{2}ky^2 \quad (10)$$

を変位yで2階偏微分をすることで作成する．したがって，剛性マトリックスはエネルギーのヘッセ行列となる．3次元の場合も，2次元と同様に作成できる．剛性マトリックスの 1 行 1 列の要素を取り出すと以下の式になる．

l_{ij}^0，l_{ij}，k_{ij}は，質点i，j間のバネの初期長とその時点での長さとバネ定数であり，x，y，zは質点i，jの座標値である．

$$\frac{\partial^2 E}{\partial {x_i}^2}=\frac{k_{ij}\left(-l_{ij}^0\left(\left(y_i-y_j\right)^2+\left(z_i-z_j\right)^2\right)+{l_{ij}}^3\right)}{{l_{ij}}^3} \quad (11)$$

このとき，右辺のl_{ij}^0とk_{ij}以外の変数が変化し続ける．実際のシミュレーションでは初期状態での剛性マトリックスを使用しているので，物体の変形が大きくなるほど誤差が生じる．したがって剛性マトリックスは幾何学的非線形になり，剛性マトリックスの非線形性を考慮する必要がある．

そこで O’Brien らは，剛性マトリックス$[k]$をテイラー展開することにより，次の式で線形近似した[2]．

$$\{\mathbf{F}\}=[K]\{\mathbf{X}\} \quad (12)$$

以降，この手法を線形近似する手法と呼ぶ．

小林らはこの手法に対して，変位をいったん物理座標系に変換し，物理座標系で力を以下の式で計算するといった手法をとった[3]．

$$\mathbf{f}_i=\sum_j k_{ij}\frac{\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i}{\left|\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i\right|}\left(\left|\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i\right|-l_{ij}^0\right) \quad (13)$$

その後，計算された力に固有行列$[\phi]$を乗じて一般化座標系に変換する．力を物理座標系で計算することにより，非線形性を考慮する．以降この手法を，力を物理座標系で計算する手法と呼ぶ．本研究ではこれら 2 つの計算手法の比較を行う．

4.　実行結果

シミュレーションでは，隣接する縦，横，斜め方向の質点をバネで接続し，最上部 1 辺を固定したバネ‐質点モデルを使用した．固有値の小さい方から 4 個に対応する振動系だけを用いてシミュレーションを行った．

図 2 と図 3 に計算時間の比較を示す．力を

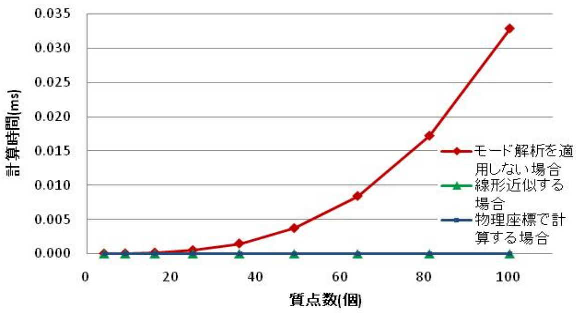


図 2　計算時間の比較(1)

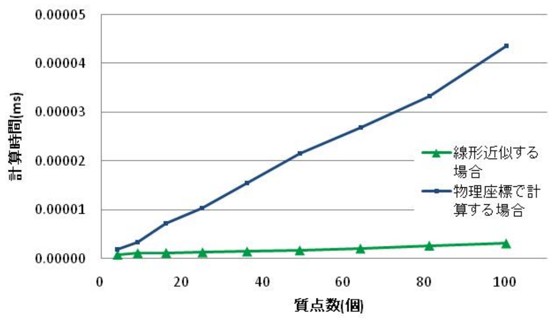


図 3　計算時間の比較(2)

物理座標系で計算する場合と線形近似する場合は，モード解析を適用しないシミュレーションに対してあまり差がないが，線形近似する場合と力を物理座標系で計算する場合だけを比較すれば差がわかる．

次に，縦横 5 個ずつ質点を配置して，線形近似する場合と力を物理座標系で計算する場合の，モード解析を使用しない場合との誤差の比較を行った. 図 4 に 1000 ステップごとの様子を示す．線形近似する場合は，時間とともに大きな計算誤差がみられたが，力を物理座標系で計算する場合は大きな誤差はあまり見られなかった．

図 4 と同じパラメータ値，振動系と質点の配置で，発散しない最大の微小時間は以下の通りであった．

- 線形近似する場合：0.440
- 力を物理座標系で計算する場合：0.368

図 5 は 3 次元空間で最上部の 1 辺を固定し，振動系を 30 個使用してシミュレーションを行った結果である．なお，この図も 1000 ステップごとの様子である．質点を xy 平面上に置いたままの初期状態でシミュレーションを行うと固有値が 0 になる, という問題が生じる．本研究は，その状態から x 軸周りに少しだけ回転した状態を初期位置としてシミュレーションを行った．図 5 の場合は 45 度回転した．3 次元での比較も 2 次元での比較と同様に，線形近似する場合は大きな誤差が確認され，力を物理座標系で計算する場合は大きな誤差は見られなかった．

以上から，力を物理座標系で計算する手法は線形近似する方法に比べて，最大にとれる微小時間は小さいが，モード解析を行わない場合に近い動きをすることが確認された．

5.　まとめ

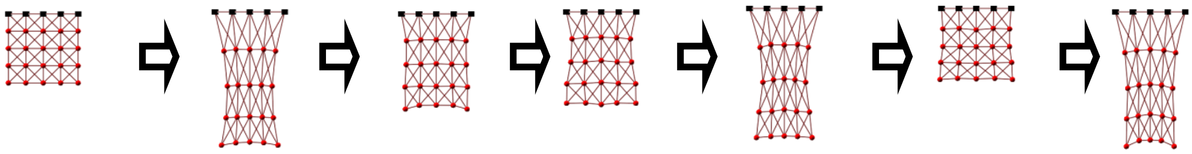
本研究では，バネ - 質点モデルにモード解析を用いてシミュレーションを行う際に，力を一般化座標系で計算できないという問題を解決するため，力を物理座標系で計算する手法と剛性マトリックスを線形近似する手法の比較結果を示した．力を物理座標系で計算する手法は線形近似する手法よりバネのシミュレーションに適していることが確認された．

今後の課題として，大変形を伴うシミュレーション，3 次元物体での振動系の分解が 2 次元の場合のようにできていない，という問題を解決することが挙げられる．

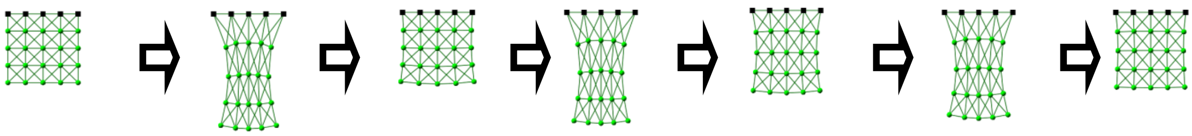
参考文献

1) Pentland A., and J. Williams, “Good Vibrations: Modal Dynamics for Graphics and Animation”, SIGGRAPH, 1989, pp.215-222.
2) James F. O’Brien，高速で安定した変形のためのモーダル解析, Game Programming Gems 4，ボーンデジタル, 2008, pp.266-276.
3) 小林輝，吉田典正，神田亮，モード解析によるバネ - 質点系の制御，第 40 回日本大学生産工学部　学術講演会　マネジメント部会,

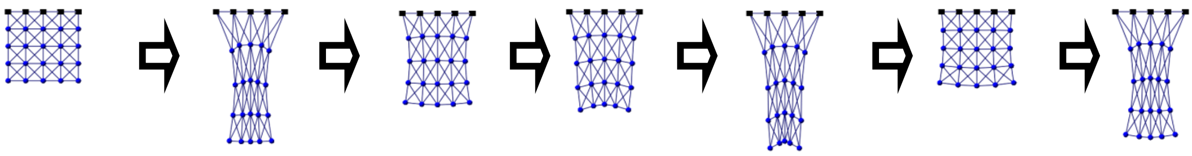
2007, pp41-44.
4）長松昭男， モード解析入門， コロナ社,
2004.



(a) モード解析を適用しない場合

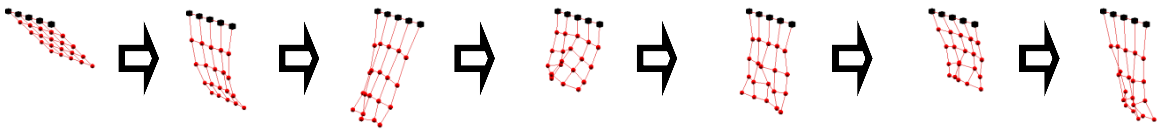


(b) 線形近似する場合(使用する振動系 4 個)

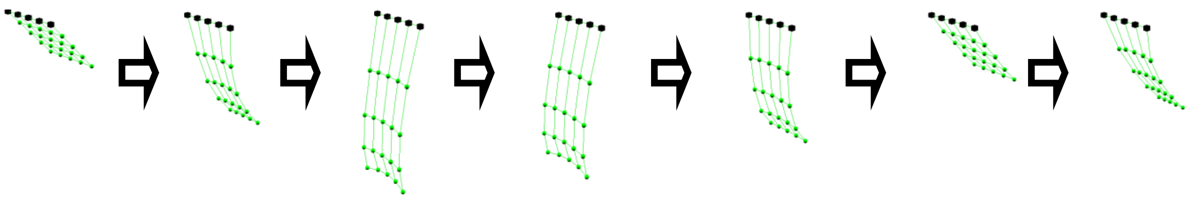


(c) 力を物理座標系で計算する場合(使用する振動系 4 個)

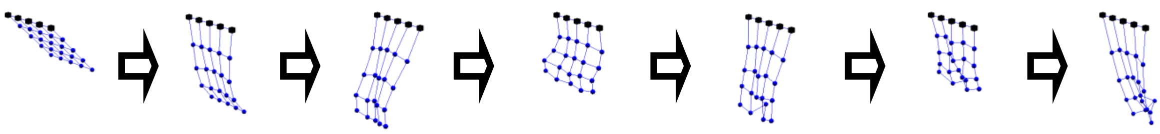
図 4　1000 ステップごとのシミュレーション結果(2 次元)



(a) モード解析を適用しない場合



(b) 線形近似する場合(使用する振動系 30 個)



(c) 力を物理座標系で計算する場合(使用する振動系 30 個)

図 5　1000 ステップごとのシミュレーション結果(3 次元)