トムソンケーブルとRCフィルターの出力電圧の最良評価

日大生産工　○武村 一雄，大阪大　亀高 惟倫，大阪大　山岸 弘幸,
日大生産工　永井 敦，防衛大　渡辺 宏太郎

伝送線の集中定数モデルであるトムソンケーブルと多段カスケード RC フィルターの出力電圧の絶対値の最大値の 2 乗は，入力電圧のパワー（L^2 ノルムの 2 乗）の正定数倍で上から評価される（ソボレフ形不等式）．最良定数を回路定数の関数として求めた．

実係数の特性多項式

$$P(z) \;=\; \prod_{j=0}^{n-1} (z+a_j) \;=\; \sum_{j=0}^{n} p_j\, z^{n-j} \qquad (p_0=1)$$

は重根を持たないフルウィッツ多項式とする．すなわち特性根 a_j は次の仮定をみたす.

仮定　$a_i \neq a_j \quad (0 \le i < j \le n-1), \quad \mathrm{Re}\, a_j > 0 \quad (0 \le j \le n-1)$

入力電圧 $f(t) \in L^2(-\infty,\infty)$ を与えると，出力電圧 $u(t)$ は次の境界値問題をみたす.

BVP

$$\begin{cases} P(d/dt)\, u \;=\; f(t) & (-\infty < t < \infty) \\ u^{(i)}(t) \;\in\; L^2(-\infty,\infty) & (0 \le i \le n) \end{cases}$$

フーリエ変換を

$$f(t) \;\rightharpoonup\; \widehat{f}(\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{-1}\,\omega t} f(t)\, dt$$

とするとき

$$G(t) \;\rightharpoonup\; \widehat{G}(\omega) \;=\; 1 \,/\, P\big(\sqrt{-1}\omega\big)$$

によりグリーン関数 $G(t)$ を定義する．BVP は唯一つの解をもち，解 $u(t)$ は

$$u(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\, f(s)\, ds \qquad (-\infty < t < \infty)$$

と表わされる．次の結論が成り立つ.

定理 1　$u^{(i)}(t) \in L^2(-\infty,\infty)$ $(0 \le i \le n)$ なる任意の $u(t)$ に対し，$u(t)$ によらない正定数 C があって，ソボレフ形不等式

$$\Big(\sup_{-\infty<s<\infty} |\, u(s) \,| \Big)^2 \le C \int_{-\infty}^{\infty} |\, P(d/dt) u(t) \,|^2 \; dt$$

が成り立つ．C のうち最良のものは

$$C(n) \;=\; \|\, G \,\|^2 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |\, G(t) \,|^2 \; dt$$

である．上の不等式で C を $C(n)$ で置きかえるとき，任意の実数 t_0 と任意の複素数 c に対し $u(t) \;=\; c\,U(t-t_0) \quad (-\infty < t < \infty)$ に対して等号が成り立つ．ただし $u(t) = U(t)$ は $f(t) = G(-t)$ $(-\infty < t < \infty)$ としたときの BVP の解である.

最良定数 $C(n)$ は特性根 a_j および特性係数 p_j の有理式である.

定理 2

(1)　$$C(n) = (-1)^{n+1}\, \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{a_j \displaystyle\prod_{k=0,\; k\neq j}^{n-1} \big(a_j^2 - a_k^2\big)}$$

(2)　$$C(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2a_0 \cdots a_{n-1}} \left|\begin{matrix} a_j^{2i+1} \\ \hline \cdots \quad 1 \quad \cdots \end{matrix}\right| \Big/ \left|\begin{matrix} a_j^{2i} \end{matrix}\right|$$

右辺は行列式の比で，分母分子共に $n \times n$ 行列である．分子の行列式の最後の行は $(1, \cdots, 1)$ である．

$$(3) \quad C(n) = \frac{1}{2p_n} \left| \, p_{n-2-2i+j} \, \right|_{(0 \le i,j \le n-3)} \Big/ \left| \, p_{n-1-2i+j} \, \right|_{(0 \le i,j \le n-2)}$$

ただし $p_j = 0 \quad (j < 0$ または $n < j)$ とする．

(2) から (3) を導くには，有限群の表現論に登場する Giambelli の公式を使う．

p_j がわかりにくく，a_j がよくわかる場合には (1)，(2) を使う．逆の場合には (3) を使う．もちろん両方ともにわかりにくい場合が多い．

参考文献

[1] ‘Discrete Bernoulli polynomials and the best constant of discrete Sobolev inequality”, A. Nagai, Y. Kametaka, H. Yamagishi, K. Takemura and K. Watanabe, Funkcialaj Ekvacioj，掲載予定 (2007).

[2] ‘The best constant of Sobolev inequalities on a bounded interval”, K. Watanabe, Y. Kametaka, A. Nagai, K. Takemura and H. Yamagishi, Journal of Mathematical Analysis and its Applications，掲載予定 (2007).

[3] ‘Green function for boundary value problem of 2M-th order linear ordinary differential equations with free boundary condition”, A. Nagai, K. Takemura, Y. Kametaka, K. Watanabe and H. Yamagishi, Far East Journal of Applied Mathematics, **26**(3)(2007), pp.393-406.

[4] ‘The best constant of L^p Sobolev inequality corresponding to the periodic boundary value problem for $(-1)^M(d/dx)^{2M}$”, Y. Kametaka, Y. Oshime, K. Watanabe, H. Yamagishi, A. Nagai and K. Takemura, Scientiae Mathematicae Japonicae, **66**, No.2 (2007), pp.169-181.

[5] ‘The best constant of Sobolev inequality which corresponds to a bending problem of a string with periodic boundary condition”, Y. Kametaka, K. Watanabe, A. Nagai, H. Yamagishi and K. Takemura, Scientiae Mathematicae Japonicae, **66**, No.2 (2007), pp.151-168.

[6] ‘Riemann zeta function, Bernoulli polynomials and the best constant of Sobolev inequality”, Y. Kametaka, H. Yamagishi, K. Watanabe, A. Nagai and K. Takemura, Scientiae Mathematicae Japonicae, **65**, No.3 (2007), pp.333-359.