## モード解析によるバネ - 質点系の制御

日大生産工(院)	○小林 輝	
日大生産工	吉田 典正	神田 亮

1. はじめに

現在,コンピュータグラフィックス(CG)は 映画, CM などの様々な分野において必要不可 欠なものとなっている.その背景として,近年 のコンピュータの処理能力の向上があり,布 [1],物体破壊などの複雑なモデルのシミュレ ーションをリアルタイムで行うことが可能に なってきている.布,物体破壊などのシミュレ ーションには,計算コストが少なく,構築が容 易であるなどの理由から,頻繁にバネ - 質点モ デルと陽的数値積分法が用いられる.しかし, これらの手法を用いた場合,図1,2に示すよ うに振動や発散といった問題が生じる[2].ま た,質点数に計算コストが比例して増加するた め,大規模なシミュレーションをリアルタイム で行うことは困難である.



本研究では, 振動工学や構造力学の分野で用 いられる, モード解析法[3][4]をバネ - 質点モ デルへ適用する手法を提案する. モード解析は Pentland 等によって CG の分野に適用された 手法である[5]. この手法はバネの振動系を独 立な成分に分解し, その性質を利用して解析を 行う手法であり,必要な振動系成分のみを使用 したシミュレーションが可能である. しかし, 力が変位に対して線形ではないため,そのまま 適用することはできない. この問題を解決する ため, Barbic 等は部分空間積分法を用いた手 法を提案した[6]. また, O'Brien は剛性マトリ ックスをテイラー展開する手法を提案した[7]. 本研究では,初期状態における剛性マトリック スから固有値,固有ベクトルを計算し,これに より力を実座標系で計算する手法を提案する. モード解析を適用することより,計算時間や安 定性の問題を解決するだけでなく,振動系を選 択することによりシミュレーションを制御す ることができる.結果,従来バネ係数や質量な どのパラメータのみの制御に比べ,バネ - 質点 系の制御が容易になることが期待される.

## 2. モード解析

モード解析は、質量などによって定義される 物理座標系から、この座標系に固有ベクトルを 乗算することによって得られる一般化座標系 に変換する[8]. 一般化座標系では図 3(a)に示 すような物理座標系上の連続なモデルを、図 3(b)のように相互に独立な振動系ごとに分解 することができる.これにより、振動系ごとの 解析が可能となる.本研究ではこの性質を利用 することにより振動系を選択し、削除、増幅等 の処理を行う.図 3(a)において、 $k_i(i=1,2)$ は バネ係数、 $m_i$ は質量、 $x_i$ は変位である.また 以降、アルファベットの小文字は物理座標系、 大文字は一般化座標系を表す.

Control of Mass-Spring System by Modal Analysis Hikaru KOBAYASHI, Norimasa YOSHIDA and Makoto KANDA



モード解析のバネ - 質点モデルへの適用
 図 3(a)の運動方程式は次のように表わされ
 る.

 $[m]{\ddot{x}} + [c]{\dot{x}} + {f} = {f_s}$ 

ここで[c]はダンピング係数,  $\{f\}$ は外力,  $\{f_g\}$ は重力による外力,  $\{\ddot{x}\}$ ,  $\{\dot{x}\}$ はそれぞれ加速度, 速度である.また本研究では,  $\{\}$ はベクトル, []は行列を表す.

本研究では、力 $f_i$ は次式によって計算する.

 $f_{i} = \sum_{j} k \frac{x_{j} - x_{i}}{|x_{j} - x_{i}|} \left( |x_{j} - x_{i}| - l_{ij} \right)$ (1)

ここで、kはバネ係数、 $l_{ij}$ はバネの自然長であ る.モード解析では、力は一般化座標系におい て求める.しかし、式(1)によって得られる力 $f_i$ は位置の応答に対し線形ではないため、一般化 座標系において計算することはできない.その ため、モード解析をそのまま適用することはで きない.本研究では、初期状態における剛性マ トリックスから、固有値、固有ベクトルを計算 する.この固有ベクトルにより一般化座標系の 応答を物理座標系に変換し、式(1)によって力 を求める.その後、再び一般化座標系に変換し、 式(2)~(4)に示す Newmark  $\beta$ 法により、n+1ス テップ後の変位  $X_{i,n+1}$ ,速度  $\dot{X}_{i,n+1}$ ,加速度  $\ddot{X}_{i,n+1}$ を求める.

$$\ddot{X}_{i,n+1} = M_i^{-1} F_{i,n+1} - M_i^{-1} C_i \dot{X}_{i,n+1} + F_{g_i}$$
(2)  
$$\dot{X}_{i,n+1} = \dot{X}_{i,n} + \frac{1}{2} (\ddot{X}_{i,n} + \ddot{X}_{i,n+1}) \Delta t$$
(3)  
$$X_{i,n+1} = X_{i,n} + \dot{X}_{i,n} \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{X}_{i,n} \Delta t^2$$
(4)

本研究で使用するアルゴリズムを図4に示す.



図 4 使用するアルゴリズム

5. 実行結果

本研究では、図5に示すモデルを縦横10個 計100個の質点を2次元平面上に構築しシミ ュレーションを行った.



図7は、物体の最上部1行を固定した物理 座標系のみのシミュレーションと、モード解析 を適用し、固有値の小さい部分に対応する振動 系を2個だけ使用し、2次元平面上でシミュレ ーションを行ったものである.それぞれを比較 すると、大きな誤差は見られなかった.

図8は図7と同様に平面上に物体を構築し, 上部両端を固定した.(a)は図7(b)と同様の振 動系を使用した.しかし,質量を大きくしてい るため,図 7(a)に比べ変形が大きくなっている. (b)は固有値の小さい方から 13 個選択し,その うち固有値の大きい方から 10 個に対応する振 動系を使用しシミュレーションを行った結果 である.(c)は(b)よりさらに固有値の大きな振 動系の部分を選択し,シミュレーションを行った結果 である.

図9は3次元空間で物体の最上部1行を固定し、シミュレーションを行った結果である. (b)は図5に示すモデルを使用したが、固有値にゼロの成分が出てしまうという問題が生じた.そこで、モード解析を適用するシミュレーションでは、図5のモデルにバネ係数、ダンピング係数が小さな補助のバネを加えた図6のモデルを使用した.また、質点数は縦横7個ずつ、計47個配置した.



図 6 3次元シミュレーション用のモデル

## 6. まとめ

本研究では、モード解析をバネ - 質点モデル に適用することにより、シミュレーションを制 御する手法を提案した.その結果、図8に示し たように同様のパラメータ値であっても、使用 する振動系を変更することにより、異なるシミ ュレーションを行うことができることが確認 された.また、3次元におけるシミュレーショ ンでは、すべての振動系を使用した場合、モー ド解析を適用しない場合と比較し、大きな誤差 は確認されなかった.しかし現段階では、2次 元の場合のようにシミュレーションを制御す るまでに至っていない.また、2次元における シミュレーションにおいても、大変形を伴うシ ミュレーションでは不自然な動作を生じるこ とが確認されている. 今後, これらの問題を解 決する必要がある.

## 参考文献

[1] 佐藤幹浩,吉田典正,対話的な布のシミュレーションに関する研究,第37回日本大学 生産工学部 学術講演会 管理部会,pp.27-30,2004.

[2] 小林輝,吉田典正,頂点分割による柔らか い物体の破壊,画像電子学会第34回年次大会, 予稿集, pp.69-70, 2006.

[3] A. Blakeborough, M. S. Williams, A. P. Darby and D. M. Williams, The development of real-time substructure testing, Philosophical Transactions: Mathematical, Physical & Engineering Sciences, 359, pp.1869-1891, 2001.

 [4] R. E. Nickell, Nonlinear Dynamics by Mode Superposition, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 7, pp.107-129, 1975.

[5] Pentland A., and J. Williams, Good Vibrations: Modal Dynamics for Graphics and Animation, SIGGRAPH, pp.215-222, 1989.

[6] J. Barbic and D. James, Real-Time
Subspace Integration for St.
Venant-Kirchhoff Deformable Models,
SIGGRAPH, pp.982-990, 2005.

[7] James F. O'Brien, 高速で安定した変形のためのモーダル解析, GAME
 PROGRAMMING Gems 4,株式会社ボーンデジタル, pp.266-276.

[8] 小林輝, 谷脇紗和, 吉田典正, 神田, モー ド削除法を適用した無条件安定と等価な陽的 数値積分法—コンピュータグラフィックスに おけるバネ - 質点モデルへの適応—, 第 39 回 日本大学生産工学部 学術講演会 機械部会, pp93-96, 2006.





図 9 3次元におけるシミュレーション結果