

曲率対数分布図を利用した平面曲線の解析

日大生産工（院） ○佐藤利英

日大生産工 吉田典正

1. はじめに

企業で製品を開発する上で、その製品のデザインの決定は重要な要因の一つである。製品をより美しく、魅力的に見せることは、消費者の製品に対する印象を大きく左右する。特に、自動車のボディ形状は消費者の印象に残るように美しくあることが望まれる。

近年、原田ら¹⁾により美しい曲線はその曲率対数分布図が直線で表されることが解明された。また、吉田ら²⁾により、曲率対数分布図が直線で表される曲線の全体像も解明されている。これまでは1本の曲率単調な曲線に対する研究が主で、曲率単調でない曲線や複数本の曲線がどのように接続されたものが美しいかということは明らかにされておらず、今後解明されることが期待される。

2. 研究目的

本研究では、デジタルカメラを用いて自動車側面の写真を撮影、その画像をプログラムに取り込み、自動車のボディ形状やドアの形状に沿うように曲線を生成する。ここで後に述べる曲率対数グラフにより、その曲線がどのような性質を持っていて、どのように接続されているのかを解析することを目的とする。

また、曲率単調な曲線を生成しづらいB-spline曲線において、容易に美しい曲線を生成することを可能にするための開発ツールの手掛かりとする。

3. B-spline 曲線

B-spline 曲線とは「Basis Spline 曲線」の略で「基底スプライン曲線」という意味を持つ。スプライン曲線とは、曲線を代表するいくつかの点の座標（制御点）を元に、その点の間をなめらかに補間・接続するような数式表現のことで、1つの曲線式で直線、円弧、楕円弧、自由曲線まで幅広く扱うことが可能である。

本研究では、複数本の3次及び5次のUniformなB-spline曲線を利用し、自動車のボディにおける自由曲線の表現を行う。B-spline曲線は曲線の接続を陽に考慮することなく、容易に曲線を接続することが可能であるため、複数本の曲線を扱う本研究に適している。

3次B-spline曲線の曲線式は式(3.1)となる。但し($0 \leq t \leq 1$)である。

$$P(t) = B_0(t)Q_0 + B_1(t)Q_1 + B_2(t)Q_2 + B_3(t)Q_3 \quad (3.1)$$

$$B_0(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3 \quad (3.2)$$

$$B_1(t) = \frac{1}{2}t^3 - t^2 + \frac{3}{2} \quad (3.3)$$

$$B_2(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} \quad (3.4)$$

$$B_3(t) = \frac{1}{6}t^3 \quad (3.5)$$

ここで式(3.2)～式(3.5)は、式(3.1)で示す 3 次 B-spline 曲線の基底関数である。また、 $P(t)$ は曲線を表し、 Q_n は曲線の制御点である。図 3.1 に 3 次 B-spline 曲線の例を示す。n 次 B-spline 曲線式は、文献 3)を参考にされたい。

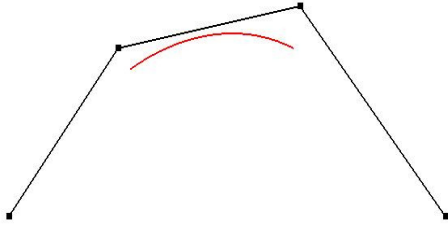


図 3.1 3 次 B-spline 曲線

4. B-spline 曲線の逆変換

B-spline 曲線では、制御点を通過しないため、指定した点を曲線が通過するようにするために逆変換 4)を行う。したがって、画像上で自動車のボディのライン上に通過点をマウスによって指定することによって、B-spline 曲線の生成が可能となる。

例えば、3 次 B-spline 曲線の逆変換において 3 点を指定した場合、その点の間には 2 本の曲線を作成するので、制御点は 5 点となる。しかし、指定した点は 3 点しかないので制御点の数を合わせるために、最初の点と最後の点をそれぞれ前後にコピーする。その後、仮制御点で逆変換の計算を行い誤差修正をすることで、曲線を生成するための制御点とする。

図 4.1 に例として上げた、3 点を指定した場合の 3 次 B-spline 曲線の逆変換の流れを示す。

ステップ 1: 自動車のボディ形状に合わせて通過点をプロットする

ステップ 2: プロットした点を仮制御点として制御点に代入する

ステップ 3: 制御点の数を調整する

ステップ 4: 逆変換の計算を行い、プロットした点を通過する曲線の制御点を求める

ステップ 5: 誤差が一定の値以下になるまで繰り返し処理を行う

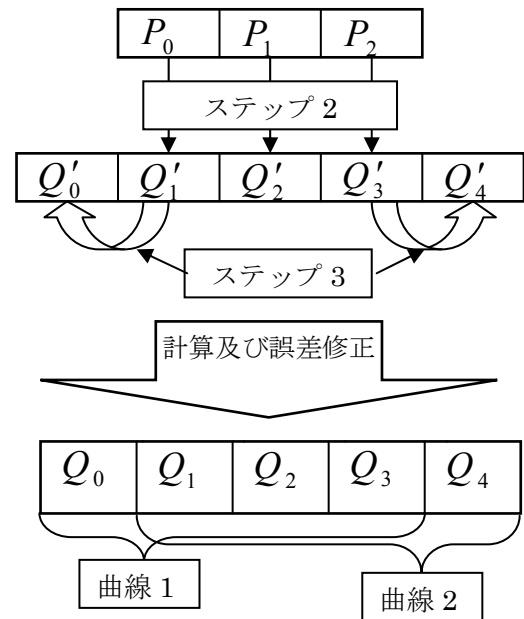


図 4.1 3 点指定時の逆変換の流れ

ここで、 P_n はマウスによって指定した通過点で、 Q'_n は逆変換の計算を行う前の仮制御点であり、 Q_n は曲線の制御点となる。

また、3 次 B-spline 曲線の逆変換の計算式は式(4.1)及び式(4.2)となる。ここで、 Del は計算誤差である。

$$Del = P_n - Q'_n + \frac{1}{2} \left(P_n - \frac{1}{2} (Q'_{n-1} + Q'_{n+1}) \right) \quad (4.1)$$

$$Q_n = Q'_n + Del \quad (4.2)$$

5 次 B-spline 曲線の場合には、仮制御点と本制御点の数を 4 つ増やすことにより、指定した 3 点の間に 2 本の曲線を描くことが可能となる。

5. 曲率対数グラフ

原田によって提案された曲率対数分布図は、曲率単調な曲線を対象としている¹⁾。本研究では、曲率対数分布図の概念を拡張し、曲率変化が単調でないものを考慮して「曲率対数グラフ」と呼ぶことにする。曲率対数グラフは、横軸に曲率半径 ρ の対数、縦軸に $\rho(ds/d\rho)$ の対数を取ったグラフである。

作成した曲線が美しい曲線だった場合、曲率対数グラフに描かれる線は直線に近くなることが原田らによって示されている。その直線がどのような傾きを示しているか調べることで、その曲線の特性が明らかとなる。

例えば直線の傾きを α とした場合、 $\alpha = 1$ のとき、その曲線は対数螺旋の一部であり、 $\alpha = -1$ のとき、曲線はクロソイド曲線の一部となる。また、 $\alpha = 2$ のときは円のインボリュートの一部となり、 $\alpha = \pm\infty$ のときは円の一部となる。

式(5.1)～式(5.2)は曲率半径の対数の計算式であり、式(5.3)～式(5.4)は $\rho(ds/d\rho)$ の対数の計算式である。ここで、 ρ は曲率半径であり、 κ は曲率で、 ρ と κ は互いに逆数の関係を持つ。式(5.3)での s は弧長で、式(5.2)の $\dot{P}(t)$ は B-spline 曲線の一階微分、 $\ddot{P}(t)$ は二階微分、式(5.4)での $\ddot{P}(t)$ は三階微分であり、 $\det(a, b)$ は 2 次元ベクトル a, b の行列式である。

$$\log(\rho) = \log\left(\frac{1}{\kappa}\right) \quad (5.1)$$

$$\kappa = \frac{|\dot{P}(t) \times \ddot{P}(t)|}{|\dot{P}(t)|^3} \quad (5.2)$$

$$\log\left(\rho \frac{ds}{d\rho}\right) = \log\left(-\frac{1}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{ds}\right) \quad (5.3)$$

$$\frac{d\kappa}{ds} = \frac{A - B}{|\dot{P}(t)|^6}$$

$$\begin{aligned} A &= \det(\dot{P}(t), \ddot{P}(t)) \dot{P}(t) \cdot \dot{P}(t) \\ B &= 3 \det(\dot{P}(t), \ddot{P}(t)) \dot{P}(t) \cdot \ddot{P}(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

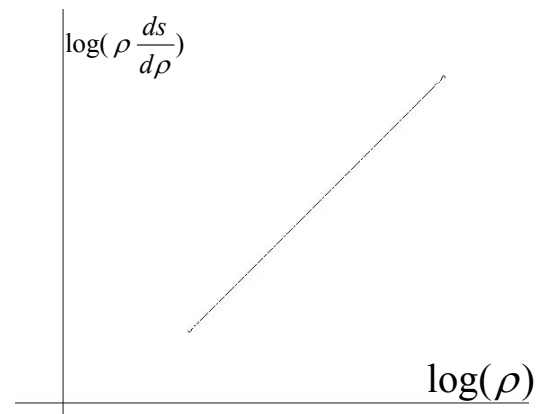
6. 実行結果

本研究における実行結果を示す。図 6.1 の (a) に 5 次 B-spline 曲線を対数螺旋上に逆変換した様子を示し、(b) にその曲率対数グラフを示す。

対数螺旋は先に述べたように、曲率対数グラフでの傾きが 1 となるので、本研究で作成した曲率対数グラフが正確かどうかの検証に使用した。



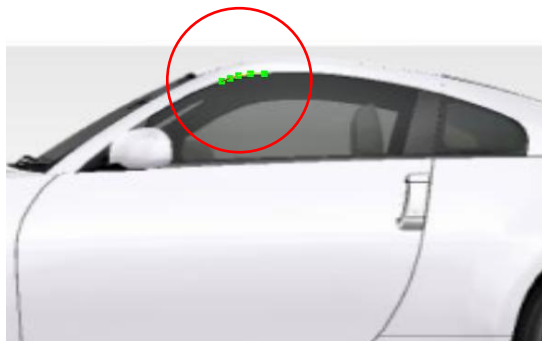
(a) 対数螺旋上への逆変換



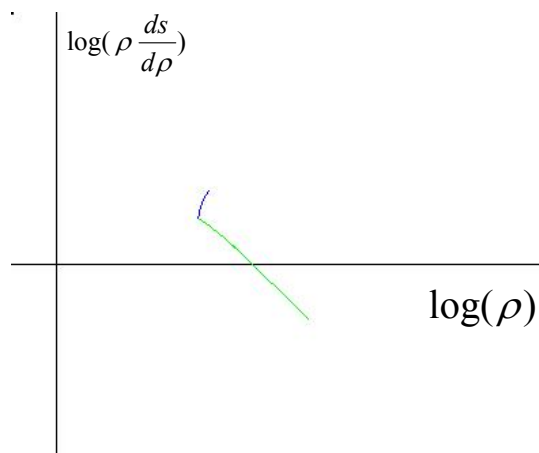
(b) 曲率対数グラフ

図 6.1 5 次 B-spline 曲線の逆変換

図 6.2 の (a) には自動車の画像を読み込み、ボディ形状に合わせて B-spline 曲線を描いた例を示し、(b) にその曲率対数グラフを表示したときの例を示す。



(a)ボディに沿った曲線



(b)曲率対数グラフ

図 6.2 実際の解析手法

また、本研究を行うにあたり、曲率対数グラフを表示する際、3 次 B-spline 曲線は曲線の連続性を考慮した場合、三階微分値が一致しない、すなわち G^2 連続性を保たないため、曲率対数グラフに隙間ができてしまった。

そこで、 G^2 連続性を保持する 4 次 B-spline 曲線で曲線の生成を試みたが、逆変換の際に制御点の個数が合わず、曲線が 3 本描けてしまうことや、個数を合わせても曲線の形状が歪になるという弊害が起きてしまった。

このことから、逆変換が容易に行え、かつ G^2 連続性が保たれているという 2 つの条件から、5 次 B-spline 曲線での逆変換及び曲率対数グラフの生成を行った。5 次 B-spline

曲線は G^3 まで連続性を保持するので、正確な曲率対数グラフを求めることが可能である。

7. まとめ及び今後の展望

本研究では、B-spline 曲線における美しい曲線を生成するツールの開発を行った。本研究では主に自動車を対象として B-spline 曲線での美しい曲線の接続について検証しているが、これは他の人工物や蝶の羽根のような自然物にも応用することが可能である。

今後は、より正確な数値を求めるためにプログラムの改良を行っていくと共に、より多くのサンプルで検証及び解析を行うことや、エッジ抽出などを用いて容易に調査対象の形状を把握できるようにしていきたい。

<参考文献>

- 1) 原田利宣, 吉本富士市, 森山真光, “魅力的な曲線とその創成アルゴリズム”, 形の科学誌 第 13 巻 第 3 号, (1998).
- 2) N. Yoshida and T. Saito, Interactive Aesthetic Curve Segments, The Visual Computer, Vol. 22, No.9-11, pp.896-905, 2006.
- 3) G. Farin, Curves and Surfaces for CAGD, Morgan-Kaufmann, 2002.
- 4) 山口富士夫, “コンピュータディスプレイによる形状処理工学 [II]”, P.84-87, 1984.