

# 並列化有限要素法による乱流の LES 解析

都立産技高専

三浦 慎一郎

## 1. はじめに

パーソナルコンピュータ (PC) をはじめとして近年のコンピュータの性能向上にはめざましいものがあるが、一方で演算クロック周波数の限界もいわれており、最近ではマルチコアによる CPU が多く出回ってきている。

数値流体力学の分野においても、こうした並列化技術を併用した計算を活用していかなければ、高速化は望めないと思われる。筆者らはこうした考えのもとに、PC クラスタをはじめとするメモリ分散型並列計算機に対する並列化手法として、領域分割法による並列計算や、メモリ共有型並列計算機に対する OpenMP による並列計算を行ってきた<sup>[1],[2]</sup>。特に領域分割法は単に高速化を図るだけでなく、大規模な記憶容量を使用する点でも有効な手法である。

本研究では、このような大規模な計算に向けた並列計算手法に関して、複雑な形状を有する流れ場や、高レイノルズ数域における乱流計算を行うための並列化有限要素法による乱流計算の適用性について検討を行う。その数値計算例として、乱流計算のベンチマーク問題として知られる平行平板間乱流 (チャネル乱流) に対して、Galerkin 有限要素法による LES 解析に対する OpenMP を用いた並列計算で検証を行う。さらに、大規模な計算を必要とする高レイノルズ数域 ( $Re = 140,000$ ) における円柱周り流れに対して、指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法を用いた陰解法に基づく LES 解析の領域分割法の適用を試みる。

## 2. LES 基礎方程式及び、有限要素スキーム

無限長を想定した円柱周り流れ問題を考える上で、非圧縮性粘性流体を仮定した運動方程式及び連続の方程式から、LES を基にしたフィルターを施し、次のフィルタリングされた支配方程式を得る。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \left( \frac{1}{Re} + \nu_t \right) \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

$\nu_t$  は、Smagorinsky モデルによりモデル化され、Van Driest 型の壁面減衰関数を併用する。運動方程式及び連続の式に対する計算のアルゴリズムにはフラクショナルステップ法を用いる。空間の離散化には、有限要素法に基づく離散化を行う。

本研究では高レイノルズ数域を対象とした乱流場を考えるため、高精度な上流化手法を与える必要がある。そこで本手法では、空間の離散化に関して指数関数による重み関数を用いた指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法による有限要素スキームを構成する。指数関数型重み関数は次式により表される<sup>[3],[4]</sup>。

$$M_\alpha = \sum_{\gamma,i} N_\alpha e^{-\alpha_i (N_\gamma x_i^\gamma - x_i^\alpha)} \quad (3)$$

ただし、

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i}{|L_i|} \text{sign}(\hat{u}_i) \quad (\text{no sum on } i) \quad (4)$$

ここで  $N_\alpha$  では双 1 次補間関数を用いるものとし、さらに式 (3) に表れる  $\alpha_i$  は上流化の割合を示すスケールリングパラメータである。

## 3. 数値計算例

### 3-1. 平行平板間流れの LES 乱流解析

壁面摩擦速度  $u_\tau$  及び平行平板間長さの半値  $\delta$  を代表値としてのレイノルズ数  $Re_\tau = 180$  における平行平板間の LES 乱流解析を行う。LES におけるサブグリッドモデルは標準 Smagorinsky モデルを用いる。数値計算法として、空間に関する離散化は Galerkin 有限要素法 (流速, 圧力共に双 1 次補間)、時間に関する離散化は 2 次精度 Adams-Bashforth 法を用いる。ただし、壁面方向の物理粘性項にのみ Crank-Nicolson 法による陰解法を用いる。連続の式と運動方程式との計算のアルゴリズムには、フラクショナルステップ法を用いる。壁面方向に関する連立方程式のソルバーは、対角スケールリング付きの共役勾配法 (CG 法) で残差の L2 ノルムは  $\epsilon = 10^{-12}$  とし、圧力ポアソンにおけるソルバーは、対角スケールリング付き共役残差法 (CR 法) で残差の L2 ノルムは  $\epsilon = 10^{-3}$  とした。

計算領域は Kim らの DNS による計算を参考に、主流方向  $x_1$ 、垂直方向  $x_2$ 、スパン方向  $x_3$  にそれぞれ  $4\pi\delta$ 、 $2\delta$ 、 $(4/3)\pi\delta$  とする。ポアソン方程式に対する行列の格納方法は、スカラー計算機を用いる場合にはキャッシュ効果が期待できる CRS (Compressed Row Storage) 形式、ベクトル機を用いる場合には、対角成分の長さをベクトル長に取ることでできる CDS (Compressed Diagonal Storage) を用いる<sup>[5]</sup>。

## Large Eddy Simulation of Turbulent Flows with a Finite Element Method and Domain Decomposition Method

Shinichiro MIURA

有限要素メッシュは、 $32 \times 64 \times 32$ 、 $64 \times 64 \times 64$ 、 $128 \times 64 \times 128$  とした。壁面方向の分割は変えず、主流方向、スパン方向のみ解像度を変えて計算を行う。

このとき、壁面方向最小メッシュ幅はいずれのケースでも  $\Delta x_2^+ = 1$  としている。時間刻み幅は  $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$  で行った。

統計データの算出は、流れが充分発達した時刻の流れ場を作成し、それぞれのメッシュに応じて補間を行い、無次元時間 20 (40000 ステップ) 行ったのちに、無次元時間 20 (40000 ステップ) のデータにより算出した。

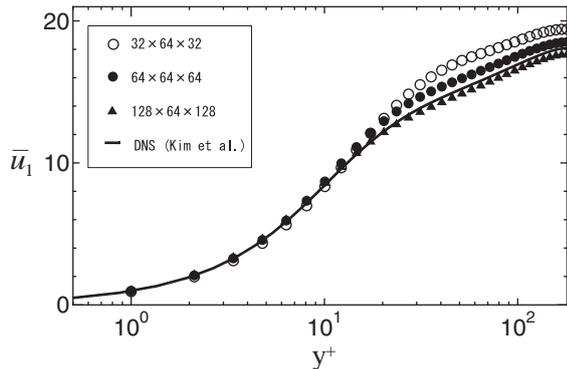


Fig. 1: Time averaged mean velocities of channel flow

図 1 の結果から、粘性低層内 ( $y^+ < 10$ ) では、いずれのケースでも DNS<sup>[6]</sup> との良い一致が見られているが、メッシュ解像度が低いほど、流速が増大していることが分かる。これらの結果は、差分法を用いた場合と同様の傾向を示している。

計算コストは、 $128 \times 128 \times 128$  の場合、NEC SX-7 による 1 ノード 16CPU を用いた場合で、1 ステップあたり約 0.37 秒である。このときのベクトル演算率は、入出力を含めて 99 % を超えている。最も計算時間の掛かる行列ベクトル積 (CDS 形式の格納) の部分は 99.3 %、1.7Gflops であり、計算機のピーク性能値 (8.8Gflops) の約 20 % である。

### 3-2. 円柱周り流れの LES 乱流解析

本手法を高レイノルズ数域での円柱周り流れに適用する。計算領域を図 2 に示す。Breuer<sup>[7]</sup> は、スパン方向長さ  $1D$ 、 $2D$ 、 $\pi D$  の長さで検討を行っているが、それによるとスパン方向の長さによる影響は大きいと考えられるため、本研究ではスパン方向長さは  $4D$  とする。境界条件は円柱上はノンスリップ条件、流入速度は代表流速として主流方向に一樣な流れを与え、流出条件は自由流出とする。スパン方向は周期条件を課し、垂直方向境界においてはスリップ条件を与える。

数値計算法として、時間積分には主流方向及び、垂直方向成分の対流項に対しては 2 次精度 Adams-Bashforth 法、物理粘性項に関しては Crank-Nicolson 法を用いる。スパン方向には対流項、拡散項共に 2 次精度 Adams-Bashforth 法による時間積分を行う。Crank-Nicolson 法を用いた場合の有限要素方程式を用いる。数値計

算法の詳細については、文献 [2] に従う。また、ポアソン方程式に対する行列の格納方法は、スカラー計算機を利用することから、CRS 形式を用いる。並列

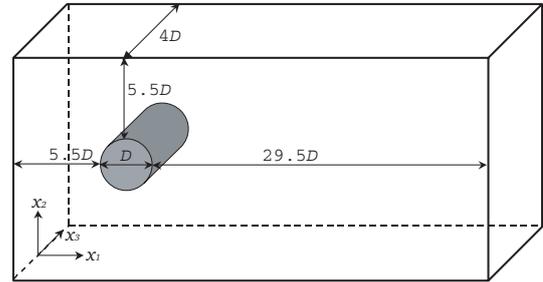
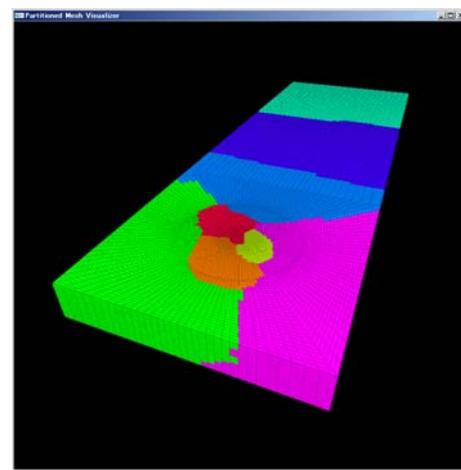
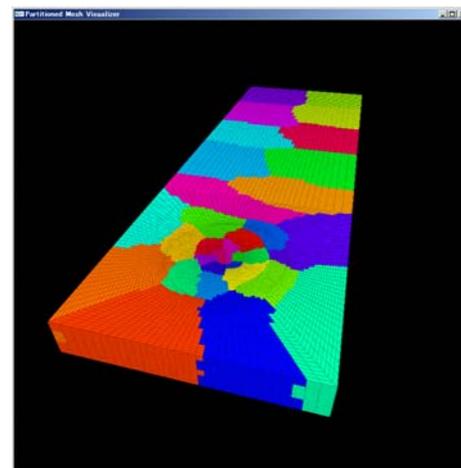


Fig. 2: Computational domain



(a) 8分割



(b) 32分割

Fig. 3: METIS による領域分割

化のアルゴリズムは、領域分割法に基づく並列化を行う。領域分割方法は、フリーソフトウェア Mitis に従い小領域に分割される (図 3)。その際、小領域間のデータ交換方法は要素のオーバーラップからデータ

の交換を行う手法を採るが、Metis ではオーバーラップ領域となる要素情報が得られないため、入力の際にそのオーバーラップとなるデータ交換部（マスターとスレーブの節点）を与えて、計算中に小領域間のデータ交換を行う。これらのプログラムには MPI で行い、この交換部分の MPI 命令は `Isend` と `Irecv` による非ブロッキング通信を用いる。計算機は、PC クラスタ（Intel PentiumD, 3.0GHz, 4 ノード 8CPU）または、IBM eServer p595（8CPU または 16CPU）を用いた。Reynolds 数を 140,000 とし、2 つのメッシュにより計算を行う。円柱に対して周方向 128 分割、半径方向に 72 分割とした。スパン方向分割に関しては 60(mesh1) と 120(mesh2) のものを用いる。mesh1 での総要素数 766,080、総節点数 793,427、mesh2 での総要素数 1,532,160、総節点数 1,573,847 である。最小メッシュ幅は  $2.66 \times 10^{-3} (\approx 1/\sqrt{Re})$ 、時間刻み幅を  $1.0 \times 10^{-3}$  として計算を行う。本手法では SGS モデルに含まれる Smagorinsky 定数及び、指数関数型重み関数に含まれるスケールパラメータ  $\alpha_i$  が含まれる。これらのパラメータの依存性を調べるために、いくつかのケーススタディを行う。表-1 にそれらをまとめる。

Table 1: Several cases of Smagorinsky number and Scaling number

Case	$C_s$	$\alpha_i$
Case A1	0.10	0.10
Case A2	0.10	0.25
Case A3	0.17	0.10
Case A4	0.17	0.25
Case A5	0.17	0.50
Case B1	0.17	0.25

スパン方向の平均及び時間平均を取った統計データにより、実験データと比較する。統計データの算出は、充分流れの状態が発達したと判断される時刻から無次元時間 60 により算出した。

主流方向流速成分の分布を実験値と比較した結果を図 4 に示す。ここで、上流かの割合を示すスケールパラメータの違いによる計算結果の差異がほとんど見られないことから、代表的なケースでの結果を図示する。いずれのケースで、実験値と良好な一致をしていることが分かる。このことから各種パラメータ、スパン方向へのメッシュ解像度の影響は、流速に関しては影響していないことが分かる。

表-2 に円柱後流における循環渦長さ  $L_r$ 、抗力係数  $C_D$ 、円柱背圧値  $C_{P_{back}}$ 、ストローハル数  $St$  をまとめる。表-2 の  $L_r$  の比較から、再循環領域が実験値に比べてやや大きい結果となっている。抗力  $C_D$  との比較から Case B1 を除いて、全体的に低い値となっている。背圧値  $C_{P_{back}}$  は、剥離位置で起こる圧力分布に大きな差異が見られることが原因であると考えられる。ス

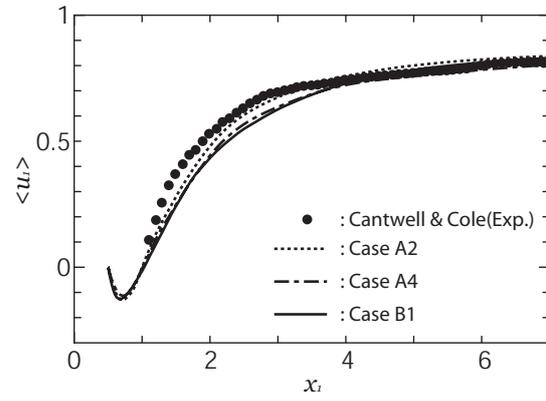


Fig. 4: Mean velocities

Table 2: Integral parameters at time domain

Case	$L_r$	$C_D$	$C_{P_{back}}$	$St$
Case A1	0.62	0.56	-0.43	0.23
Case A2	0.51	0.60	-0.41	0.19
Case A3	0.61	0.69	-0.52	0.21
Case A4	0.50	0.74	-0.49	0.21
Case A5	0.59	0.73	-0.48	0.17
Case B1	0.53	0.93	-0.66	0.17
Exp.[2]	0.44	1.237	-1.21	0.179

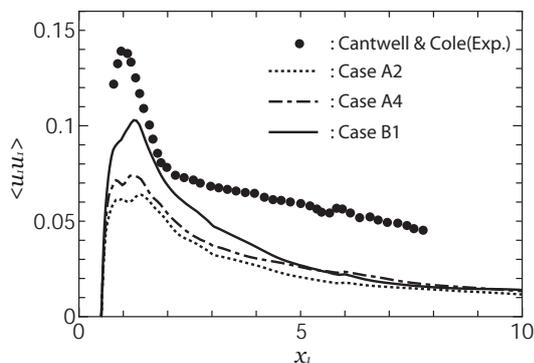
トローハル数  $St_t$  はほぼ実験値に近い値となっている。

#### 4. まとめ

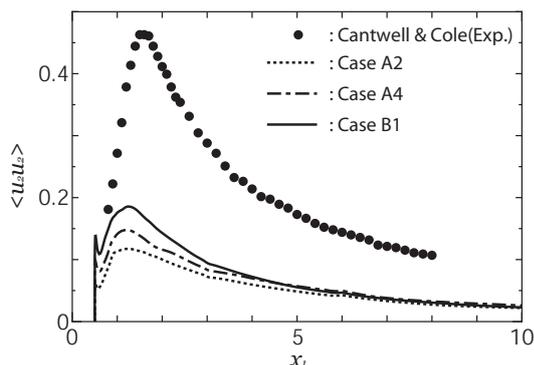
並行平板間乱流問題に対して、OpenMP を用いて並列計算を行い流速分布の統計量を DNS と比較した。その結果、差分法と同様に、解像度が低いと流速成分が大きくなる結果が得られた。また、ベクトル化率、並列化率も良好であり、高速化が可能であることが示された。

円柱周り流れ乱流問題に対して、指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法に基づく上流化スキームを用いて、 $Re = 140,000$  における円柱周り流れの LES 計算を行った。また、上流化効果を適切に取り入れるために運動方程式に対しても陰解法を用いた。さらに、大規模な計算を行うために領域分割法に基づく並列計算を行った。そこでいくつかの見解が得られた。

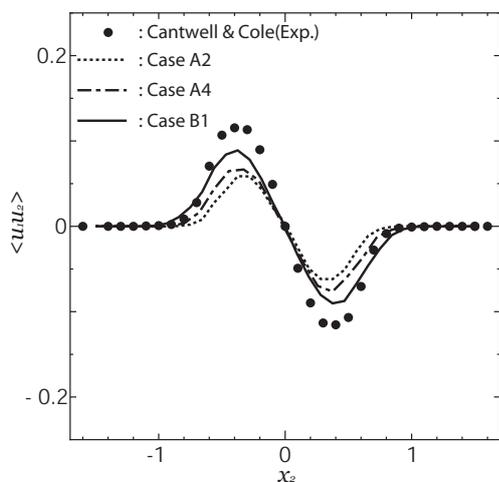
1. 円柱後方における流速に関しては定量的な一致が見られ、スパン方向成分の分割数の影響やスマゴリンスキー定数の影響も小さいことが分かった。
2. 乱流強度に関しては、スパン方向分割数による影響が見られた。また、主流方向及び垂直方向成分に関しては、実験データとの差異が見られた。
3. 抗力に関して、実験と比べると過小評価される傾向にあったがスパン方向の分割数の影響が見られ、分割数を増やすことで改善された結果が



(a) 主流方向乱流強度



(b) 垂直方向乱流強度



(c) Reynolds stresses

Fig. 5: 乱流強度分布

得られた .

4. 上流化の割合を示すスケーリングパラメータを 0.1, 0.25, 0.5 として与えたが, 流速, 乱流強度に関してほとんど差異が見られなかった . しかし, スマゴリンスキーモデルの値 (0.1 と 0.17) に大きく影響を受ける結果となった .

今後の課題として, 圧力分布の実験データとの差異から剥離位置付近におけるメッシュ解像度の影響が考えられるため, 今後これらの影響について考察する必

要があると思われる .

#### 謝辞

本研究におけるベクトル並列計算機の利用は, 東北大学情報シナジーセンターにおける平成 18 年度共同研究「領域分割型並列化有限要素法による LES 乱流解析に関する研究」により行われた . また, 本研究で利用した計算機の一部は, 九州大学情報基盤センターにおける高性能演算サーバ (IBM eServer p5 モデル 595) 及び, 東北大学情報シナジーセンター所有のスーパーコンピュータ (NEC SX-7 及び SX-7C) を利用した .

#### 参考文献

- (1) 三浦慎一郎, 並列化有限要素法に基づく陰解法を用いた円柱周り流れの LES 乱流計算, 九州大学情報基盤センター 広報全国共同利用版, 6, No.1, 2006 (掲載予定)
- (2) 三浦慎一郎, 水内衛, 角田和彦, 有限要素法を用いた円柱周り流れの LES 乱流解析, 計算工学講演会論文集, pp.277-280, 2006-6.
- (3) Kakuda, K., Tosaka, N. :Finite element approach for high Reynolds number flows, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.41, pp.223-232, 1992.
- (4) Kakuda, K., Tosaka, N. Nakamura, T.:Finite element analysis for 3-d high Reynolds number flows, *Int. J. Comp. Fluid Dyns.*, Vol.7, pp.163-178, 1996.
- (5) 長谷川 里美, 長谷川 秀彦, 藤野 清次 訳, 反復法 Templates, 朝倉書店, 1996.
- (6) Moin, P. and Kim, J., Numerical investigation of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, **118**, 341-377, 1982.
- (7) Breuer, M., A challenging test case for large eddy simulation: high Reynolds number circular cylinder flow, *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, Vol.21, pp.648-654, 2000.
- (8) Cantwell, B., Coles, D. :An experimental study of entrainment and transport in turbulent near wake of a circular cylinder, *J. of Fluid Mech.*, Vol.136, pp.321-374, 1983.