

# 最大ボトルネック経路の表計算

日大生産工(学部) 鎌田 真介  
日大生産工 篠原 正明

## 1. はじめに

最短路を計算する方法は過去にも多く存在し、ネットワークを用いた計算方法も様々な手法がある。

本研究ではPower法により表計算ソフトExcel (Microsoft Excel) を用い、ネットワーク行列における最大ボトルネック経路問題の求解を行う。

## 2. ネットワーク行列

ネットワークにおけるノード間のリンクの重みであるリンク特性を持つ行列をネットワーク行列と呼ぶ。よってネットワーク行列  $A$  は、対象となるネットワーク内にあるノード数を  $n$  とすると  $n \times n$  の要素で構成される。つまり、任意のノード  $i$  からノード  $j$  へのリンク特性値  $d_{ij}$  が行列  $A$  の  $(i, j)$

要素となる。

ネットワーク行列におけるリンク特性が、ノード間の容量を示す場合を特に容量行列という。

普通の代数(足し算、掛け算)の零元は  $0$  であるが、最大ボトルネック経路代数の零元は、 $-\infty$  となる。

本研究ではネットワーク行列は容量行列

と考え、リンク特性値はノード間の容量として用いることにする。

またネットワークモデルにおいてノード  $i, j$  間が直接リンクしていない状態について

は行列  $A$  の要素  $d_{ij}$  は  $-\infty$  として示し直接

リンクしている場合に限り距離の値を示す。

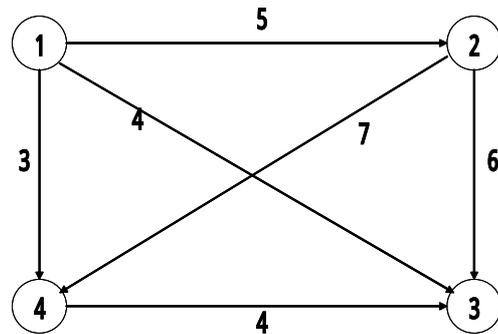


図1 ネットワークモデル

図1は具体的なモデルを用いた例題を示す。

また、この容量行列  $A$  を(1)に表す。

また今回のネットワークモデルは有効ネットワークを用いた。

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 5 & 4 & 3 \\ -\infty & -\infty & 6 & 7 \\ -\infty & -\infty & -\infty & 4 \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \quad (1)$$

### 3. 最大ボトルネック経路

ボトルネックとは、広義ではシステム設計上の制約の概念である。

ネットワークでは通信帯域幅が狭い地点を指す。ネットワーク上における一地点の通信が混雑もしくは低速の場合、その前後のネットワークの速度が高速またはデータが疎に係わらず通信速度の最大値が混雑している一地点の速度に抑えられてしまう。

すなわち、情報通信ネットワークにおいて各リンクにビット速度要領(帯域幅)が与えられたときに、特定の2点間で1本のルートを利用して伝送することができる最大ビット速度を求める問題が最大ボトルネック経路を求めることに帰着される。

あるいは、道路交通ネットワークにおいて各リンクに車両の重さ制限(最大許容負荷値)が与えられたときに、特定の2点間に通行可能な最大重量を求める計算も最大ボトルネック経路を求めることに帰着される。

本研究ではネットワーク行列におけるノード間の容量値におけるボトルネックを導き出すこととする。

### 4. Power 法

本研究では最大ボトルネック経路の求解にあたり、Power 法を用いる。ここではPower 法についての説明をする。

Power 法はネットワーク行列に単位行列  $E$  を加えた行列を、累乗し続けることで求解する方法である。累乗回数に関しては定常状態に至るところを収束条件とする。ここで累乗回数  $k$  の意味するところは、各ノードから他のノードまでのステップ数である。

また Power 法によって得られる行列  $X$

は、以下のように定義される。

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A^k \quad (2)$$

$$X = E + A + A^2 + A^3 + A^4 \quad (3)$$

$k = 4$  であれば式(3)になり、4 ステップでたどり着ける各ノードまでの最大ボトルネック経路が得られる。

### 5. 計算

以上の計算法を用いて図1のモデルで最大ボトルネックを求める。よって容量行列  $A$  の値も上記式(1)となる。また、ステップ数は4として計算を行った。計算式は上記式(2),(3)となる。

この計算式を Excel によって累乗計算し、結果を表示する。単位行列  $E$  を初期入力とし行列  $A$  を入力すると対応する表に累乗計算をされた結果が表される。また、- の値は Excel では-999 とすることで補う。

### 6. 計算結果

計算を行った結果、行列  $X$  は式(4)となった。

$$X = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 5 & 5 \\ -\infty & \infty & 6 & 7 \\ -\infty & -\infty & \infty & 4 \\ -\infty & -\infty & -\infty & \infty \end{pmatrix} \quad (4)$$

行列  $X$  の参照をする。この行列を表すのは各ノード間での最大値でリンクできる値(総容量値とする)の最大ボトルネック容量値、いわゆる最小値ということである。例をあげると1行4列目の値はノード からノード までの最大ボトルネック容量値を表している。ノード からノード まで

のリンクは 3 通りある。まず一つ目はノード ノード という経路であり、総容量値は 3 となる。二つ目はノード ノード ノード という経路であり、総容量値は 8 である。三つ目はノード ノード ノード という経路であり、総容量値は 12 である。この結果、ノード ノード ノード を採用することになり、その中の最大ボトルネック容量値は 5 となる。

よってこの値の結果は正常であるといえる。

## 7. 2 種類のパワー法についての考察

本研究では(2)式或いは(3)式の総和形パワー法を用いた。ここで、 $A^k$  の  $(i, j)$  要素はノード  $i$  からノード  $j$  への  $k$  ステップ程度での最大ボトルネック容量値を与えるため、(2)式或いは(3)式では  $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  ステップ全般の中での最大ボトルネック容量値を結果として与える。(2)式、(3)式に代わるパワー法として、(5)式が考えられる。

$$X = (E + A)^4 \quad (5)$$

(5)式をボトルネック経路代数下で展開すれば(2)式或いは(3)式に帰着できる。

(5)式の計算は今回開発した表計算ソフトが容易に応用できるので、今後の課題としたい。

## 8. 終わりに

この計算結果より Excel による計算でネットワーク行列における最大ボトルネック容量値を求められることが明らかとなった。しかしどのノード間のルートを採用したのかが表示されず、どういうルート間の経路での最大ボトルネック容量値であるのかということが分からないという欠点もあることが分かった。

また、Excel の機能には絶対参照、相対参照という機能があり 1 つの数式を入力した後、コピー&ペーストを他のセルに対して行うだけで他の数式も書けてしまう。この機能により研究を早く進めることができた。

今回 Microsoft Excel という表計算ソフトの機能を利用し、最大ボトルネック容量値を求めるソフトを作ったが、このソフトには利用が可能な機能が多数存在する。その機能を利用し今後の課題を有効に進めていきたい。

本研究では、行列  $X = \{x_{ij}\}$  を求めることにより、点  $i \rightarrow$  点  $j$  間の最大ボトルネック容量値が計算できたが、具体的なルート Excel 表計算でどのように計算するかは今後の課題である。

## 9. 参考文献

[1]篠原 正明, 篠原 健「零元が定義できないパス代数」, 日本大学生産工学部第 38 回学術講演会(2005-12-3), 7-26

[2]飯田 加奈子:「パワー法による最短路の表計算」, 平成 17 年度日本大学生産工学部数理情報工学科卒業研究概要集

[3]久保 光:「パワー法による最長路の表計算」, 平成 17 年度日本大学生産工学部数理情報工学科卒業研究概要集

補足資料

|         |   |   |   |   |
|---------|---|---|---|---|
| E =     |   |   |   |   |
|         |   |   |   |   |
|         |   |   |   |   |
|         |   |   |   |   |
| A ^ 1 = | -999  | 5   | 4   | 3   |
|         | -999  | -999  | 6   | 7   |
|         | -999  | -999  | -999  | 4   |
|         | -999  | -999  | -999  | -999  |
| A ^ 2 = | =MAX(MIN(\$E6,E\$6),<br>MIN(\$F6,E\$7),<br>MIN(\$G6,E\$8),MIN(\$H6,E\$9))     | =MAX(MIN(\$E6,F\$6),<br>MIN(\$F6,F\$7),<br>MIN(\$G6,F\$8),MIN(\$H6,F\$9))     | =MAX(MIN(\$E6,G\$6),<br>MIN(\$F6,G\$7),<br>MIN(\$G6,G\$8),MIN(\$H6,G\$9))     | =MAX(MIN(\$E6,H\$6),<br>MIN(\$F6,H\$7),<br>MIN(\$G6,H\$8),MIN(\$H6,H\$9))     |
|         | =MAX(MIN(\$E7,E\$6),<br>MIN(\$F7,E\$7),<br>MIN(\$G7,E\$8),MIN(\$H7,E\$9))     | =MAX(MIN(\$E7,F\$6),<br>MIN(\$F7,F\$7),<br>MIN(\$G7,F\$8),MIN(\$H7,F\$9))     | =MAX(MIN(\$E7,G\$6),<br>MIN(\$F7,G\$7),<br>MIN(\$G7,G\$8),MIN(\$H7,G\$9))     | =MAX(MIN(\$E7,H\$6),<br>MIN(\$F7,H\$7),<br>MIN(\$G7,H\$8),MIN(\$H7,H\$9))     |
|         | =MAX(MIN(\$E8,E\$6),<br>MIN(\$F8,E\$7),<br>MIN(\$G8,E\$8),MIN(\$H8,E\$9))     | =MAX(MIN(\$E8,F\$6),<br>MIN(\$F8,F\$7),<br>MIN(\$G8,F\$8),MIN(\$H8,F\$9))     | =MAX(MIN(\$E8,G\$6),<br>MIN(\$F8,G\$7),<br>MIN(\$G8,G\$8),MIN(\$H8,G\$9))     | =MAX(MIN(\$E8,H\$6),<br>MIN(\$F8,H\$7),<br>MIN(\$G8,H\$8),MIN(\$H8,H\$9))     |
|         | =MAX(MIN(\$E9,E\$6),<br>MIN(\$F9,E\$7),<br>MIN(\$G9,E\$8),MIN(\$H9,E\$9))     | =MAX(MIN(\$E9,F\$6),<br>MIN(\$F9,F\$7),<br>MIN(\$G9,F\$8),MIN(\$H9,F\$9))     | =MAX(MIN(\$E9,G\$6),<br>MIN(\$F9,G\$7),<br>MIN(\$G9,G\$8),MIN(\$H9,G\$9))     | =MAX(MIN(\$E9,H\$6),<br>MIN(\$F9,H\$7),<br>MIN(\$G9,H\$8),MIN(\$H9,H\$9))     |
| A ^ 3 = | =MAX(MIN(\$E11,E\$6),<br>MIN(\$F11,E\$7),<br>MIN(\$G11,E\$8),MIN(\$H11,E\$9)) | =MAX(MIN(\$E11,F\$6),<br>MIN(\$F11,F\$7),<br>MIN(\$G11,F\$8),MIN(\$H11,F\$9)) | =MAX(MIN(\$E11,G\$6),<br>MIN(\$F11,G\$7),<br>MIN(\$G11,G\$8),MIN(\$H11,G\$9)) | =MAX(MIN(\$E11,H\$6),<br>MIN(\$F11,H\$7),<br>MIN(\$G11,H\$8),MIN(\$H11,H\$9)) |
|         | =MAX(MIN(\$E12,E\$6),<br>MIN(\$F12,E\$7),<br>MIN(\$G12,E\$8),MIN(\$H12,E\$9)) | =MAX(MIN(\$E12,F\$6),<br>MIN(\$F12,F\$7),<br>MIN(\$G12,F\$8),MIN(\$H12,F\$9)) | =MAX(MIN(\$E12,G\$6),<br>MIN(\$F12,G\$7),<br>MIN(\$G12,G\$8),MIN(\$H12,G\$9)) | =MAX(MIN(\$E12,H\$6),<br>MIN(\$F12,H\$7),<br>MIN(\$G12,H\$8),MIN(\$H12,H\$9)) |
|         | =MAX(MIN(\$E13,E\$6),<br>MIN(\$F13,E\$7),<br>MIN(\$G13,E\$8),MIN(\$H13,E\$9)) | =MAX(MIN(\$E13,F\$6),<br>MIN(\$F13,F\$7),<br>MIN(\$G13,F\$8),MIN(\$H13,F\$9)) | =MAX(MIN(\$E13,G\$6),<br>MIN(\$F13,G\$7),<br>MIN(\$G13,G\$8),MIN(\$H13,G\$9)) | =MAX(MIN(\$E13,H\$6),<br>MIN(\$F13,H\$7),<br>MIN(\$G13,H\$8),MIN(\$H13,H\$9)) |
|         | =MAX(MIN(\$E14,E\$6),<br>MIN(\$F14,E\$7),<br>MIN(\$G14,E\$8),MIN(\$H14,E\$9)) | =MAX(MIN(\$E14,F\$6),<br>MIN(\$F14,F\$7),<br>MIN(\$G14,F\$8),MIN(\$H14,F\$9)) | =MAX(MIN(\$E14,G\$6),<br>MIN(\$F14,G\$7),<br>MIN(\$G14,G\$8),MIN(\$H14,G\$9)) | =MAX(MIN(\$E14,H\$6),<br>MIN(\$F14,H\$7),<br>MIN(\$G14,H\$8),MIN(\$H14,H\$9)) |
| A ^ 4 = | =MAX(MIN(\$E16,E\$6),<br>MIN(\$F16,E\$7),<br>MIN(\$G16,E\$8),MIN(\$H16,E\$9)) | =MAX(MIN(\$E16,F\$6),<br>MIN(\$F16,F\$7),<br>MIN(\$G16,F\$8),MIN(\$H16,F\$9)) | =MAX(MIN(\$E16,G\$6),<br>MIN(\$F16,G\$7),<br>MIN(\$G16,G\$8),MIN(\$H16,G\$9)) | =MAX(MIN(\$E16,H\$6),<br>MIN(\$F16,H\$7),<br>MIN(\$G16,H\$8),MIN(\$H16,H\$9)) |
|         | =MAX(MIN(\$E17,E\$6),<br>MIN(\$F17,E\$7),<br>MIN(\$G17,E\$8),MIN(\$H17,E\$9)) | =MAX(MIN(\$E17,F\$6),<br>MIN(\$F17,F\$7),<br>MIN(\$G17,F\$8),MIN(\$H17,F\$9)) | =MAX(MIN(\$E17,G\$6),<br>MIN(\$F17,G\$7),<br>MIN(\$G17,G\$8),MIN(\$H17,G\$9)) | =MAX(MIN(\$E17,H\$6),<br>MIN(\$F17,H\$7),<br>MIN(\$G17,H\$8),MIN(\$H17,H\$9)) |
|         | =MAX(MIN(\$E18,E\$6),<br>MIN(\$F18,E\$7),<br>MIN(\$G18,E\$8),MIN(\$H18,E\$9)) | =MAX(MIN(\$E18,F\$6),<br>MIN(\$F18,F\$7),<br>MIN(\$G18,F\$8),MIN(\$H18,F\$9)) | =MAX(MIN(\$E18,G\$6),<br>MIN(\$F18,G\$7),<br>MIN(\$G18,G\$8),MIN(\$H18,G\$9)) | =MAX(MIN(\$E18,H\$6),<br>MIN(\$F18,H\$7),<br>MIN(\$G18,H\$8),MIN(\$H18,H\$9)) |
|         | =MAX(MIN(\$E19,E\$6),<br>MIN(\$F19,E\$7),<br>MIN(\$G19,E\$8),MIN(\$H19,E\$9)) | =MAX(MIN(\$E19,F\$6),<br>MIN(\$F19,F\$7),<br>MIN(\$G19,F\$8),MIN(\$H19,F\$9)) | =MAX(MIN(\$E19,G\$6),<br>MIN(\$F19,G\$7),<br>MIN(\$G19,G\$8),MIN(\$H19,G\$9)) | =MAX(MIN(\$E19,H\$6),<br>MIN(\$F19,H\$7),<br>MIN(\$G19,H\$8),MIN(\$H19,H\$9)) |
| X =     | =MAX(E6,E11,E16,E21)  | =MAX(F6,F11,F16,F21)  | =MAX(G6,G11,G16,G21)  | =MAX(H6,H11,H16,H21)  |
|         | =MAX(E7,E12,E17,E22)  | =MAX(F7,F12,F17,F22)  | =MAX(G7,G12,G17,G22)  | =MAX(H7,H12,H17,H22)  |
|         | =MAX(E8,E13,E18,E23)  | =MAX(F8,F13,F18,F23)  | =MAX(G8,G13,G18,G23)  | =MAX(H8,H13,H18,H23)  |
|         | =MAX(E9,E14,E19,E24)  | =MAX(F9,F14,F19,F24)  | =MAX(G9,G14,G19,G24)  | =MAX(H9,H14,H19,H24)  |

図 2 Excel 表計算ソフトによる Power 法の関数式