

# Class A Bezier 曲線の対話的制御法

日大生産工 (院) ○平岩 智之 日大生産工 吉田 典正 東京農工大 齋藤 隆文

## 1. はじめに

特徴曲線は、車のボディやその他の工業デザインの高品質な曲面を決定するために利用される重要な曲線である。「良い特徴曲線」は、一般に、最小の数の曲率変化が単調な曲線の集合である 5)。過去、曲率変化の単調な曲線を生成する多くの研究が行われている 1, 3, 4, 5, 6, 7)。

自動車産業では、自動車のボディなどの美しさが求められる外観の曲面を Class A 曲面と呼び、エンジンルームなどに用いられる曲面は Class B 曲面と呼んでいる。G. Farin は、Class A 曲面に利用可能な特徴曲線を生成する Class A Bezier 曲線を提案した 3)。Class A Bezier は、曲率変化が単調になる Bezier 曲線の制御点を容易に生成可能であるが、対話性に欠けるという問題点がある。本研究では 3 次の平面 Class A Bezier 曲線を対象として、対話的に制御する手法を提案する。

## 2. Bezier 曲線

Bezier 曲線はパラメトリック曲線であり、パラメータ  $t$  における曲線上の点  $x(t)$  は次のように定義される。

$$x(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \quad (1.1)$$

ただし、 $b_i$  は制御点、 $B_i^n(t)$  は Bernstein 多項式 2) であり、

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{(n-i)} \quad (1.2)$$

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{if } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1.3)$$

である。図 1 に、7 次 Bezier 曲線の例を示す。Bezier 曲線は、凸閉包性、アフィン不変性、de

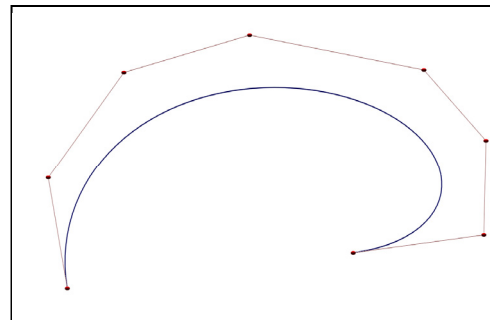
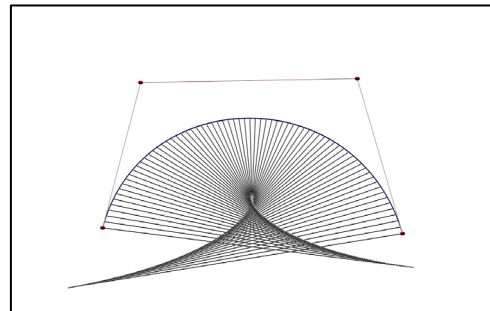
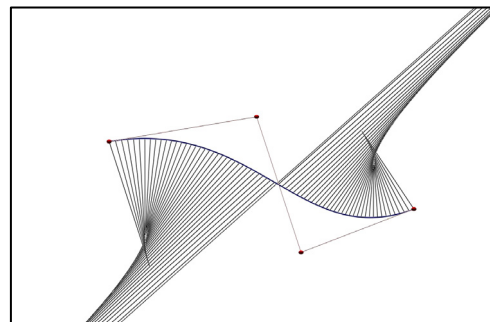


図 1 7 次 Bezier 曲線



(a)



(b)

図 2 3 次 Bezier 曲線の縮閉線

Interactive Control Method of Class A Bezier Curves

Tomoyuki HIRAIWA, Norimasa YOSHIDA and Takafumi SAITO

Casteljauアルゴリズム2)などの様々な優れた性質やアルゴリズムを持つが、特徴曲線に利用するという観点では図2に示すような問題点をもつ。図2では、曲線とともに、曲率中心の軌跡である縮閉線が表示されている。これらの縮閉線から、図2に示す Bezier 曲線の曲率変化が単調でないことが分かる。曲率変化の単調でない曲線は、特徴曲線として利用することができない。

### 3. Class A Bezier 曲線

Gerald Farin は、曲率変化が単調な Bezier 曲線の制御点を導き出す手法を提案し、この手法によって生成された曲線を Class A Bezier 曲線と呼ぶ。図3に、3 次の Class A Bezier 曲線の制御点の例を示す。

制御点  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  を持つ  $n$  次の Bezier 曲線は、 $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$  としたとき、 $i = 0 \dots n-1$  に対して、次の条件を満たすときに Class A Bezier 曲線となる3)。

- (1)  $|\Delta \mathbf{b}_{i+1}| = T |\Delta \mathbf{b}_i|$
- (2)  $\Delta \mathbf{b}_{i+1}$  と  $\Delta \mathbf{b}_i$  のなす角が  $\theta (< 90 \text{ deg})$
- (3)  $\cos \theta > \frac{1}{T}$

$T$  と  $\theta$  が指定されたとき、次のような行列 ( $\theta$  による回転行列 +  $T$  によるスケール倍) を作成することができる。

$$M = \begin{bmatrix} T \cdot \cos \theta & T \cdot \sin \theta & 0 \\ T \cdot \sin \theta & T \cdot \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$  が指定されると、 $\Delta \mathbf{b}_0$  が求まるので、他の  $\Delta \mathbf{b}_i (i = 2, \dots, n-1)$  は、

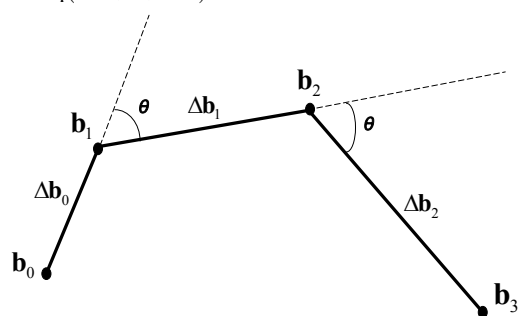


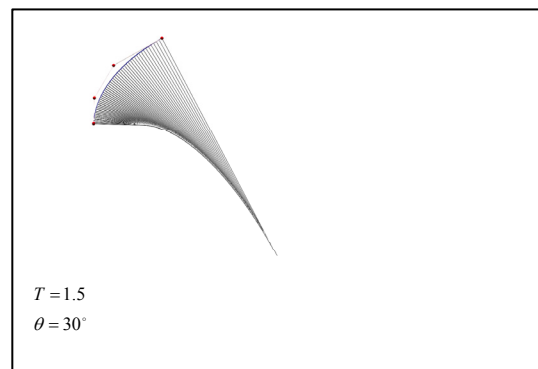
図3 3次 Class A Bezier 制御点

$$\Delta \mathbf{b}_i = M^i \cdot \Delta \mathbf{b}_0 \quad (2.2)$$

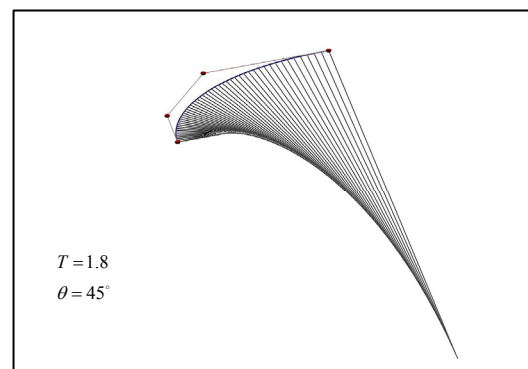
によって求まる。これより他の制御点  $\mathbf{b}_i (i > 1)$  は次式で求まる。

$$\mathbf{b}_i = \Delta \mathbf{b}_{i-1} + \mathbf{b}_{i-1} \quad (i > 1) \quad (2.3)$$

図4に3 次の Class A Bezier 曲線の例を示す。Class A Bezier 曲線は、曲線の次数  $n$ 、最初の2つの制御点  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ 、および  $T, \theta$  が指定されると一意に決定される。Class A Bezier 曲線は、容易に曲率単調な曲線を生成できるものの、ユーザが設定しなければならないパラメータが多く、また曲線の終点がどこにくるのか曲線を描いてみないと分からないため、対話性に乏しく改善が必要である。



(a)



(b)

図4 Class A Bezier 実行画面

### 4. Class A Bezier 曲線の対話的制御

本節では3 次の平面 Class A Bezier 曲線における対話性の問題を解決する。図5に示すように、3つの制御点  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  を指定することによって、Class A Bezier 曲線の制御点を自動的に計算する。

これによって、3点のみを指定して Class A Bezier 曲線を描けるようになり、ユーザは直感性に欠けるパラメータを指定することがなく、また両端点が必ず  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2$  になることを保障するため始点・終点の位置をあらかじめ決定することができる。

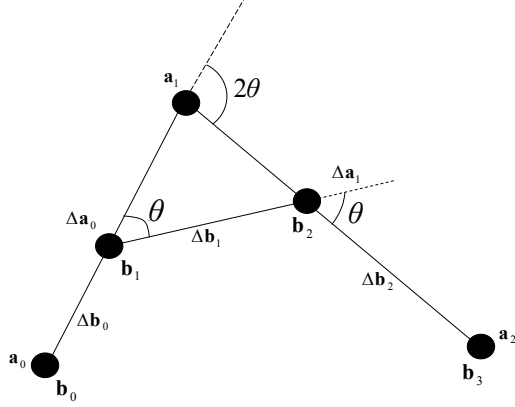


図5 対話的な3次 Class A Bezier 制御点

$\mathbf{a}_i (i=0\dots2)$  をユーザが指定し、Class A Bezier 曲線の制御点  $\mathbf{b}_i (i=0\dots3)$  を求める問題を考える。端点での一致の条件から、 $\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0$ 、 $\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_2$  である。

$T$  は次式のように定義される。

$$T = \frac{|\Delta \mathbf{b}_1|}{|\Delta \mathbf{b}_0|} = \frac{|\Delta \mathbf{b}_2|}{|\Delta \mathbf{b}_1|} \quad (3.1)$$

ベクトル  $\mathbf{u}$  を次のように定義する。

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0}{|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0|} \quad (3.2)$$

$\Delta \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0$ 、 $\Delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$  と定めたとき、 $\theta$  は  $\Delta \mathbf{a}_0$  と  $\Delta \mathbf{a}_1$  のなす角の半分である。

$\mathbf{d} = [dx \ dy]^T = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0$  とし、式(2.2)を用いると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} &= |\Delta \mathbf{b}_0| \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \\ &+ T \cdot |\Delta \mathbf{b}_0| \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \\ &+ T^2 \cdot |\Delta \mathbf{b}_0| \begin{bmatrix} \cos(-2\theta) & -\sin(-2\theta) \\ \sin(-2\theta) & \cos(-2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3.3)

しかし  $T$  と  $|\Delta \mathbf{b}_0|$  は未知のパラメータである。式(3.3)を変形すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} &T^2(dx(\sin(-2\theta)u_x + \cos(-2\theta)u_y) \\ &\quad - dy(\cos(-2\theta)u_x - \sin(-2\theta)u_y)) \\ &+ T(dx(\sin(-\theta)u_x + \cos(-\theta)u_y) \\ &\quad - dy(\cos(-\theta)u_x - \sin(-\theta)u_y)) \\ &+ (d_x \cdot u_y - d_y \cdot u_x) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

式(3.4)に解の公式を用いることによって  $T$  が求まる。ただし、 $T$  の値が負になる場合や、虚数になる場合には解が存在せず、 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  から3次 Bezier 曲線の制御点を求めることができない。

$T$  の値が求まると、 $|\Delta \mathbf{b}_0|$  の値は、次式から求めることができる。

$$|\Delta \mathbf{b}_0| = dx / (T^2(\cos(2\theta) \cdot u_x - \sin(2\theta) \cdot u_y) + T(\cos\theta \cdot u_x - \sin\theta \cdot u_y) + u_y) \quad (3.5)$$

$\Delta \mathbf{b}_0 = |\Delta \mathbf{b}_0| \mathbf{u}$  であるので、式(2.2)と式(2.3)よりすべての制御点を算出することができる。

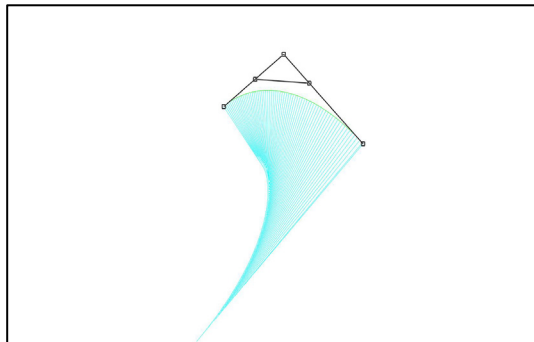
図6に本手法によって生成した3次の Class A Bezier 曲線の例を示す。前述したように、3点  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  から Bezier 曲線の制御点を求めることができない場合がある。そこで、 $\mathbf{a}_0 = [-1 \ 0]^T$ 、 $\mathbf{a}_2 = [1 \ 0]^T$  とし、 $\mathbf{a}_1$  をウィンドウ内で移動させ、Class A Bezier が描ける場合には  $\mathbf{a}_1$  の位置に対応するピクセルを白で塗り、描けない場合には黒で塗った結果を図7に示す。

## 5. まとめと今後への展望

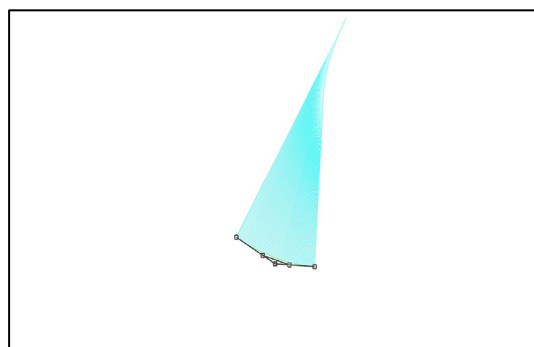
Class A Bezier 曲線は、曲率単調な Bezier 曲線の制御点を容易に算出することのできる優れた手法であるが、いくつかのパラメータ設定が必要なことや、曲線の終点がどこにくるのか分からず対話性に欠けているという問題点を持っている。本研究では、3次の平面 Bezier 曲線を対象とし、3個の制御点のみによって Class A Bezier 曲線に対話的に描画する手法を提案した。また、Class A Bezier 曲線が描画可能な領域も明らかにした。

今後の展望としては、任意の次数の Class A

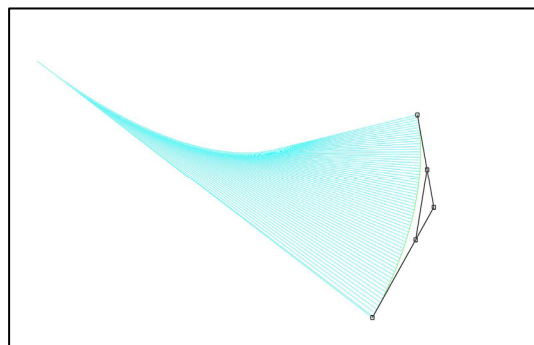
Bezier 曲線や空間曲線への拡張などが挙げられる。



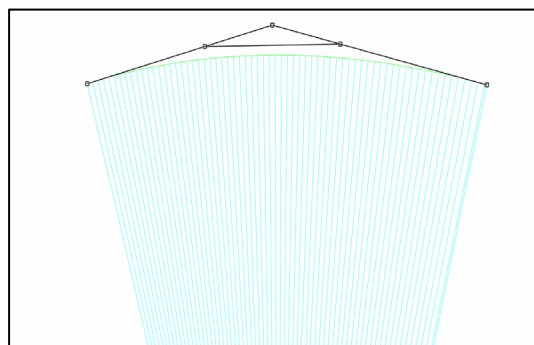
(a)



(b)



(c)



(d)

図6 対話的な Class A Bezier 曲線

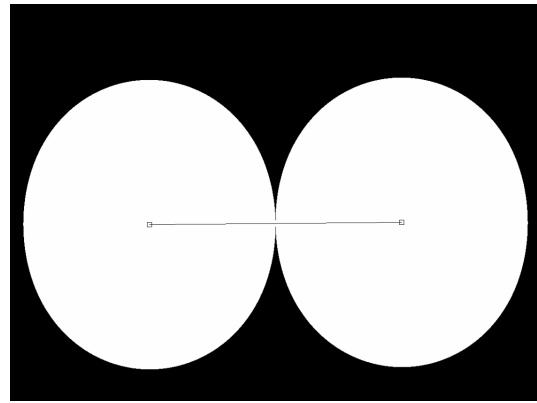


図7 Class A Bezier 曲線の描画可能領域

#### 参考文献

- 1) D. A. Dietz and B. Piper, Interpolation with cubic spirals, Computer Aided Geometric Design, Vol. 21, No. 2, pp.165-180, 2004.
- 2) G. Farin, Curves and Surfaces for CAGD 4th Edition, Academic Press, 1997
- 3) G. Farin, Class A Bezier curves, Computer Aided Design, 23(7), pp.573-581, 2006
- 4) N. S. Sapidis, Frey, W. H., Controlling the curvature of quadratic Bezier curve. Computer Aided Geometric Design, 9(2), pp.85-91, 1992.
- 5) Y. Wang and B. Zhao and L. Zhang and J. Xu and K. Wnag and S. Wang, Designing Fair curves using monotone curvature pieces. Computer Aided Geometric Design, 21(5), pp.515-527, 2004.
- 6) N. Yoshida and T. Saito, Interactive Aesthetic Curve Segment, The Visual Computer (Pacific Graphics), Vol. 22, No.9-11, pp.896-905, 2006.
- 7) 吉田典正, 斎藤隆文: 美しい曲線の全体像解明と対話的制御, Visual Computing/グラフィクスとCAD 合同シンポジウム, pp.77-82, 2006.