零元が定義できないパス代数系

日大生産工　〇篠原　正明
情報システム研究所　篠原　健

1. はじめに

最短路(min,+)、最大ボトルネック路(max,min)、パス総数(+,×)、ブール代数(ブール和、ブール積)、等々様々なネットワーク・グラフ上のパス(path)問題がパス代数系(⊕,⊗)の行列方程式定式化により統一的に取り扱うことができ、アルゴリズムなど知財権利の帰属先決定にパス代数が重要な役割を果たす[1,2,3]。行列方程式(これを基本とすれば、随伴も含み、さらに、行あるいは列を抜き出した方程式)を X=AX+B とし、これを反復法あるいは直接法など様々な解法で求解することにより様々なアルゴリズムが誕生する。さて、ここで今まで議論の対象となっていたほとんどの双演算パス代数系(⊕,⊗)においては[1,2,3]、単位元 u、零元 z が定義でき(従って、単位行列Ｉ、零行列 O も定義できる)、暗黙の了解の下で様々な求解法が矛盾なくかつ問題なく定義されていた。というよりは、ネットワーク・グラフ上のパス問題という実体がありかつパス代数系で定式化できる問題では、自然と単位元、零元が存在していた…と言うべきかもしれない。それでは、2 つの演算⊕、⊗を人工的に与えた任意のパス代数系において、単位元、零元が定義されるか？…と言うと、答えは「No」であり、必ずしも単位元、零元は定義されるとは限らない。

以下では、2、3 の零元が定義されない双演算パス代数系を考察し、そのような代数系でも、（変形）基本行列方程式 X=AX+B を満たす解を求める方法が存在しうることを示す。

2. 双演算代数系(⊕,⊗)における単位元 u と零元 z の定義

普通の双演算代数系(+,×)における単位元は 1 であり、零元は 0 である。a を任意の実数とするならば、

$0+a=a$ (1)
$1\times a=a$ (2)
$0\times a=0$ (3)

が成立する。(1)と(2)は、各 2 項演算＋、×について、任意元に作用しても不変の元が存在し、それが各々0 と 1 であることを意味し、(3)が零元の特徴付けである。零行列 O は、全要素が 0 の行列、単位行列Ｉは、対角要素が 1、非対角要素が 0 の行列である。

一般の双演算パス代数系(⊕,⊗)においても、値域の任意元 a に対して以下の(4)、(5)、(6)を満たす z、u を零元、単位元と定義する。

$z\oplus a=a$ (4)
$u\otimes a=a$ (5)
$z\otimes a=z$ (6)

零行列 O は全要素が z、単位行列Ｉは対角要素が u、非対角要素が z の行列、と自然に定義される。

3. 零元が定義できないパス代数系の定理

⊕は加算＋の一般化であり、「一般化加算」あるいは「並列演算」、⊗は乗算×の一般化であり、「一般化乗算」あるいは「直列演算」と呼び、いずれも 2 項演算子であり、交換律成立を以下仮定する。　双演算代数系(⊕,⊗)について以下の定理が成立する。

[定理 1]

⊕と⊗が同じ 2 項演算子の代数系では、(唯一)零元 z が存在しない。

[証明]

⊕＝⊗＝〇とすると、任意元 a に対して(4)と(6)すなわち、(7)と(8)、が成立しなければならない。

$z\bigcirc a=a$ (7)
$z\bigcirc a=z$ (8)

このような z は z=a 以外には存在せず、元 a の任意性に矛盾する。(Q.E.D.)

Path Algebraic System with Undefined Zero
Masaaki SHINOHARA and Ken SHINOHARA

4. 零元が定義できないパス代数系の例

[双演算系例 1]双加算系(+,+)

単位元 u=0 だが、定理 1 より零元 z は定義できない。

[双演算系例 2]双乗算系(×,×)

単位元 u=1 だが、定理 1 より零元 z は定義できない。

[双演算系例 3]逆系(×,+)

(4)、(5)、(6)は+と×の役割を逆にした逆系では、以下となる。

z×a=a　　(9)

u+a=a　　(10)

z+a=z　　(11)

(10)より、u=0 だが、(9)と(11)を満たす z は存在しない。よって、零元は定義できない。

[双演算系例 4](+,max)、a∈{正実数}

z+a=a　　　　(12)

max(u,a)=a　　(13)

max(z,a)=z　(14)

(12)より、ｚ=0 だが、これと(14)を満たす z は存在しない。よって、零元は定義できない。

5. 算法

基本方程式 X=AX+B において、零元が無いならば直接法系算法は無理と考え、これを反復法により求解するアプローチを考える。さらに、基本方程式にこだわらず双演算系のネットワーク・グラフ理論的意味付けにもとづくアプローチも考察する。

アプローチⅠ

B=Iと置き、X(k)=AX(k－1)+I、X(0)=Iにより反復すれば、X(1)=A+I、X(2)=A^2+A+I、…、X(k)=A^k+A^{k-1}+…+A+Iとなるが、零元が定義できなければ、B=Iと置けないので、本アプローチは無理である。

アプローチⅡ

X(k)=AX(k－1)、X(0)=Aにより反復すれば、X(1)=A^2、X(2)=A^3、…、X(k)=A^{k+1}となる。もし、X(n+1)=X(n)ならば、変形した基本方程式X=AXを満足する。

アプローチⅢ

基本方程式X=AX+Bにはこだわらず、A^kあるいはA+A^2+A^3+…+A^kのネットワーク・グラフ理論的意味付けにもとづき、その表現法を直接計算する。

6. 算法の適用例

[算法適用例 1]双加算系(+,+)

$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$とすると、

$A^2=\begin{pmatrix}9 & 9\\ 11 & 11\end{pmatrix}$、$A^3=\begin{pmatrix}24 & 24\\ 26 & 26\end{pmatrix}$、…

と計算でき、かつ並列演算+、直列演算×とした、ネットワーク・グラフ理論的意味付けを A^k は持つ。例えば、A^2 の(1,2)要素は、図 1 のネットワークにおいて、①から②へのステップ経路の 2 つの経路(①→①→②,①→②→②)の重みを各経路毎に直列演算では加算し(3+1,1+4)、その後、4 と 5 を並列演算でも加算した値(4+5=9)である。

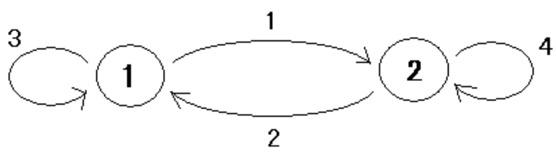

図１　行列Ａのネットワーク表現

7. おわりに

文献[1][2][3]で扱われているパス代数は、ほとんどが基本方程式X=AX+BでB=Iとした定式化にもとづいている。これは暗黙の了解として、単位行列Iの存在、すなわち単位元と零元の存在を仮定しており、かつ事実、存在している。本論文では、このような仮定が成立しない場合、特に零元がうまく定義できないような双演算パス代数系を考察し、基本方程式としての定式化は無理だが、変形定式化ならびにA^kのネットワーク・グラフ理論的意味は満足しうることを示した。但し、枝が存在しない場合の取り扱い方法ならびにこのクラスで現実的に意味の有るパス問題の発見(値域制限)などは今後の課題である。

[参考文献]

〔１〕篠原正明：回路網諸問題への掃き出し系算法の適用、日本オペレーションズリサーチ学会 1974 年度春季研究論文集、2-2-6,pp.85-86（1974.4).

〔２〕篠原正明：回路網諸問題の反復法による求解およびパスーカット標準形、日本オペレーションズリサーチ学会 1974 年度春季研究論文集、2-2-7,pp.87-88（1974.4).

〔３〕篠原正明：パス代数、日本大学生産工学研究科・大学院講義ノート、第 15 章（2000).