二重相反境界要素法によるBurgers方程式の近似解析

日大生産工（院）　○ 小林　正史
日大生産工　　　　　 登坂　宣好

1．はじめに

我々を取り巻く自然現象の大部分は非線形現象といっても過言ではない。その数理モデルとして与えられる非線形微分方程式は，現在様々な数値計算手法[1)]を用いることによって近似的に解析されている。しかしその中で，境界型解法に分類される境界要素法を用いた非線形問題の解析は非常に少ない。

その理由として考えられることは，積分方程式において非線形項を含む領域積分項が存在することである[2)]。この問題点を解決するために，領域積分をそれと等価な境界積分に変換する手法がいくつか提案されている。その中で，二重相反法は実用的な手法であり，かつ複雑な公式を用いることもなく境界積分への変換を行うことができる。

本論では，二重相反境界要素法を粘性流れ問題に適用し，その有効性を検討することを目的とする。その基礎として１次元Burgers方程式を取り上げ，差分法との比較を通してその適用性と有効性とを検討する。

2．境界型解法

2.1　境界要素法

境界要素法[3), 4)]は，支配微分方程式と境界条件にGreenの公式などを適用して境界積分方程式に変換したのち，これを境界要素による離散化を行うことにより近似的に解く方法である。この方法では，境界積分方程式を解析の対象にするので，解析対象領域の次元を１つだけ下げて取り扱うことができる。このため差分法や有限要素法と比較して，最終的に解くべき連立１次代数方程式の元数が極めて少なくなるとともに，入力データ数や計算時間を大幅に減少させることができるという特徴を有する。

2.2　二重相反法

二重相反法[5)]は，1982年にNardiniとBrebbiaによって提案された手法で，被積分関数を座標に関する関数で近似するという特徴を有する。この方法では，その関数を未知係数α_jと既知の座標関数f_jとの級数和で表現した式を用いる。そして，基本解を定義する場合と同様に既知関数f_jに対する特解$\hat{u}_j$を定義し，その特解$\hat{u}_j$を用いて逆定式化を行う。その結果，領域積分を近似的にそれと等価な境界積分に変換することができる。

3．Burgers方程式の近似解析

3.1　基礎微分方程式

粘性流れ問題を１次元化した非定常Burgers方程式の境界値問題を以下に示す。

・　非定常Burgers方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1\,,\, 0 < t) \tag{1}$$

・　初期条件

$$u(x,0) = u^0(x) \quad (0 < x < 1) \tag{2}$$

・　境界条件

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (0 < t) \tag{3}$$

ここで，uは流速の成分，νは流体の粘性係数である。

3.2　積分方程式表現

式（1）の時間導関数の取扱いとして，以下の差分近似を導入する[7)]。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+1} = \frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\Delta t} \tag{4}$$

Approximation Analysis of Burgers Equation
by The Dual Reciprocity Boundary Element Method

Masashi KOBAYASHI and Nobuyoshi TOSAKA

式（1）は，以下の半離散式として表すことができる。

$$\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2}(x) - \gamma^2 u^{n+1}(x) = \frac{1}{\nu} u^{n+1}(x) \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}(x) - \gamma^2 u^n(x) \quad (\gamma^2 = \frac{1}{\nu \Delta t}) \tag{5}$$

式（5）に対して，重み関数 $w(x)$ を用いた次の重み付き積分表現を与える。

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial^2 u^{n+1}(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 u^{n+1}(x) \right\} w(x) dx = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\nu} u^{n+1}(x) \frac{\partial u^{n+1}(x)}{\partial x} - \gamma^2 u^n(x) \right\} w(x) dx \tag{6}$$

式（6）に部分積分を2回適用すると，以下の逆定式化が得られる。

$$\left[\frac{\partial u^{n+1}(x)}{\partial x} w(x) \right]_0^1 - \left[u^{n+1}(x) \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right]_0^1 + \int_0^1 u^{n+1}(x) \left\{ \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 w(x) \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\nu} u^{n+1}(x) \frac{\partial u^{n+1}(x)}{\partial x} - \gamma^2 u^n(x) \right\} w(x) dx \tag{7}$$

重み関数 $w(x)$ として, 次の微分方程式を満たす関数 $w^*(x,\xi)$ を選ぶ。

$$\frac{\partial^2 w^*(x,\xi)}{\partial x^2} - \gamma^2 w^*(x,\xi) = -\delta(x-\xi) \tag{8}$$

ただし，$\delta(x-\xi)$ はDiracのdelta関数である。式（8）を式（7）に代入することにより，以下の積分方程式が得られる。

$$u^{n+1}(\xi) = \left[\frac{\partial u^{n+1}(x)}{\partial x} w^*(x,\xi) \right]_0^1 - \left[u^{n+1}(x) \frac{\partial w^*(x,\xi)}{\partial x} \right]_0^1 + \int_0^1 \left\{ \gamma^2 u^n(x) - \frac{1}{\nu} u^{n+1}(x) \frac{\partial u^{n+1}(x)}{\partial x} \right\} w^*(x,\xi) dx \tag{9}$$

3.3　二重相反法による領域積分の評価

式（9）の右辺第3項を以下のように示す。

$$I = \int_0^1 \left\{ \gamma^2 u^n(x) - \frac{1}{\nu} u^{n+1}(x) \frac{\partial u^{n+1}(x)}{\partial x} \right\} w^*(x,\xi) dx \tag{10}$$

被積分関数を M 個の1次独立な既知関数 $f_j(x)$ と未知係数 $\alpha_j\,(j=1,2,\cdots,M)$ の積の級数和で表した次式で近似する。

$$J = \gamma^2 u^n(x) - \frac{1}{\nu} u^{n+1}(x) \frac{\partial u^{n+1}(x)}{\partial x} \approx \sum_{j=1}^{M} \alpha_j f_j(x) \tag{11}$$

ここで，関数 $f_j(x)$ は M 個の点から構成され，これらの点は極と呼ばれる。関数 $f_j(x)$ に対応する特解 $\hat{u}_j(x)$ を以下のように定義する。

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_j(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 \hat{u}_j(x) = -f_j(x) \tag{12}$$

本論では関数 $f_j(x)$ を，極の位置 x_j と任意に与えられた点 x との距離 r の関数として次のように与える。

$$f_j(x) = C_1 + C_2 r(x_j, x) + C_3 r^2(x_j, x) \tag{13}$$

ここで，C_1, C_2, C_3 は任意係数である。以上より, 被積分関数 J は次のように近似される。

$$J \approx -\sum_{j=1}^{M} \alpha_j \left\{ \frac{\partial^2 \hat{u}_j(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 \hat{u}_j(x) \right\} \tag{14}$$

式（14）を式（10）に代入することにより，領域積分 I は次のように近似される。

$$\begin{aligned} I &\approx -\int_0^1 \left\{ \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \left\{ \frac{\partial^2 \hat{u}_j(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 \hat{u}_j(x) \right\} \right\} w^*(x,\xi) dx \\ &= -\sum_{j=1}^{M} \alpha_j \left\{ \left[\frac{\partial \hat{u}_j(x)}{\partial x} w^*(x,\xi) \right]_0^1 - \left[\hat{u}_j(x) \frac{\partial w^*(x,\xi)}{\partial x} \right]_0^1 + \int_0^1 \hat{u}_j(x) \left\{ \frac{\partial^2 w^*(x,\xi)}{\partial x^2} - \gamma^2 w^*(x,\xi) \right\} dx \right\} \\ &= -\sum_{j=1}^{M} \alpha_j \left\{ \left[\frac{\partial \hat{u}_j(x)}{\partial x} w^*(x,\xi) \right]_0^1 - \left[\hat{u}_j(x) \frac{\partial w^*(x,\xi)}{\partial x} \right]_0^1 - \hat{u}_j(\xi) \right\} \end{aligned} \tag{15}$$

以上より，式（9）は以下の境界積分方程式に書き換えられる。

$$u^{n+1}(\xi) = \left[\frac{\partial u^{n+1}(x)}{\partial x} w^*(x,\xi) \right]_0^1 - \left[u^{n+1}(x) \frac{\partial w^*(x,\xi)}{\partial x} \right]_0^1 - \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \left\{ \left[\frac{\partial \hat{u}_j(x)}{\partial x} w^*(x,\xi) \right]_0^1 - \left[\hat{u}_j(x) \frac{\partial w^*(x,\xi)}{\partial x} \right]_0^1 - \hat{u}_j(\xi) \right\} \tag{16}$$

式（16）に極限操作を施すことにより，以下の離散化表現を得る。

$$\mathbf{H}\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{G}\mathbf{q}^{n+1} = \left(\mathbf{H}\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{G}\hat{\mathbf{Q}}\right)\boldsymbol{\alpha} \quad (17)$$

ただし，式（17）において

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_j(0) \\ \hat{u}_j(1) \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{u}_j(0)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \hat{u}_j(1)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (18)$$

とし， $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ は境界要素解析による影響行列，$\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{q}^{n+1}$ は境界上の節点ベクトルである。式（17）に式（3）を代入して得られる連立1次方程式を解くことにより，境界値問題の近似解を求めることができる。

3.4　未知係数αの決定

次の段階として，式（17）における未知係数 $\boldsymbol{\alpha}$ を求めることを考える。まず，式（11）について次式が得られる。

$$\mathbf{J} = \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha} \quad (19)$$

式（19）から $\boldsymbol{\alpha}$ を求めるために，非線形項に関する領域積分を次のように線形化する。

$$I = \int_0^1 \left\{ \gamma^2 u^n(x) - \frac{1}{\nu} U \frac{\partial u^{n+1}(x)}{\partial x} \right\} w^*(x,\xi) dx \quad (20)$$

ここで, U を既知流速とする。次に, 流速 $u^{n+1}(x)$ を式（11）と同様に次式で近似する。

$$u^{n+1}(x) \approx \sum_{j=1}^{M} \beta_j f_j(x) \quad (21)$$

このとき，流速ベクトル $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ について

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} \quad (22)$$

を得る。$u^{n+1}(x)$ の1階導関数の近似は, 式(21)より以下のように与えられる。

$$\frac{\partial u^{n+1}(x)}{\partial x} \approx \sum_{j=1}^{M} \beta_j \frac{\partial f_j(x)}{\partial x} \quad (23)$$

従って次の表現を得る。

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \boldsymbol{\beta} \quad (24)$$

以上より，式（22），（24）より

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (25)$$

を得る。ここで，$\mathbf{F}^{-1}$ は $\mathbf{F}$ の逆行列である。線形化された式（20）より，次式が得られる。

$$\mathbf{J} = \gamma^2 \mathbf{U}^n - \frac{1}{\nu} \mathbf{U}^{n+1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (26)$$

ただし，

$$\mathbf{U}^n = \begin{bmatrix} u^n(x_1) \\ u^n(x_2) \\ \vdots \\ u^n(x_M) \end{bmatrix}, \mathbf{U}^{n+1} = \begin{bmatrix} u^{n+1}(x_1) & & & 0 \\ & u^{n+1}(x_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u^{n+1}(x_M) \end{bmatrix} \quad (27)$$

である。よって，式（19）より未知係数 $\boldsymbol{\alpha}$ は

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1} \left(\gamma^2 \mathbf{U}^n - \frac{1}{\nu} \mathbf{U}^{n+1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \right) \quad (28)$$

となる。

4．数値計算例

１次元非定常粘性流れ問題における数値計算例を示す。表1に各々の計算条件，表2に数値計算例の種類を示す。

表1　計算条件

初期条件	$u^0(x) = \sin(\pi x)$
時間増分	$\Delta t = 0.02$
反復計算における初期流速	前の時間ステップでの流速値
収束判定条件	$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$

表2　数値計算例の種類

Type	f_j	ν	分割数
1	r	0.15	20
2	$r + r^2$	0.15	20
3	$r + 2r^2$	0.15	20

ただし，いずれの場合も150時間ステップにおける結果である。以上の諸条件のもとで，Burgers方程式（1次元非定常粘性流れ問題）に対する近似解析を行った。図1～3に各々の場合の二重相反境界要素法と差分法との数値解の比較，表3にType 1とType 3との数値解の比較を示す。なお比較している差分法による解析では，領域を10分割し，時間微分に1次の前進差分, 空間微分に2次の中央差分を用いた次のスキームに基づき計算を行った。

$$u_i^{n+1} = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + \left\{ 1 - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \right\} u_i^n$$

$$(i = 1, 2, \cdots, N-1) \quad (29)$$

ただし，Δx は x の増分，N は分割数である。

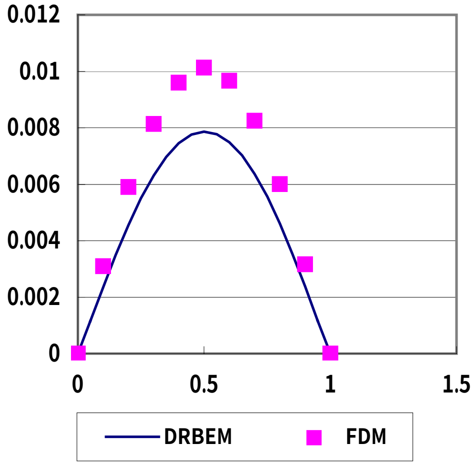

図1　数値解の比較（Type 1）

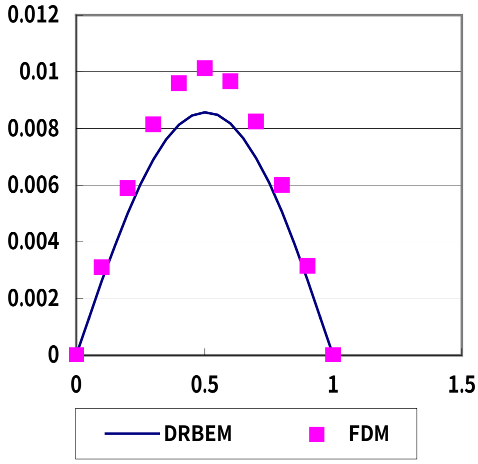

図2　数値解の比較（Type 2）

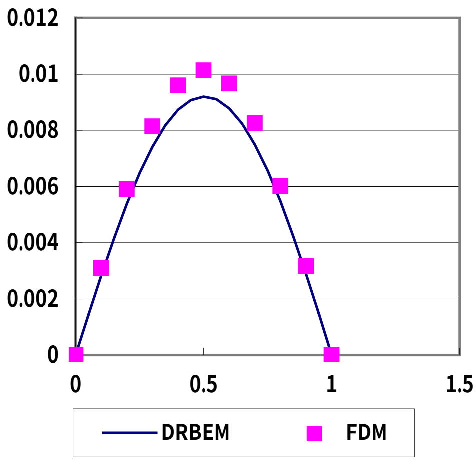

図3　数値解の比較（Type 3）

表3　数値解の比較（Type 1,3）

x	Type 1	Type 3	FDM
0.0	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	0.00235	0.00283	0.00310
0.2	0.00455	0.00538	0.00590
0.3	0.00631	0.00741	0.00814
0.4	0.00746	0.00873	0.00960
0.5	0.00787	0.00920	0.01013
0.6	0.00749	0.00878	0.00966
0.7	0.00637	0.00749	0.00825
0.8	0.00461	0.00546	0.00601
0.9	0.00238	0.00288	0.00316
1.0	0.00000	0.00000	0.00000

5．おわりに

本論では，１次元非定常粘性流れ問題に対して二重相反境界要素法を適用し，その有効性を検討した。結果として，関数 f_j について3つの係数 C_1, C_2, C_3 のうち，C_3 の値によって数値解に影響を与えることが示された。

今後の課題として，関数 f_j や粘性係数 ν，また分割数を更に変化させた場合の数値計算例を示すことにより，本論で示した数値計算例との比較検討を行っていきたい。

参考文献

1) 登坂宣好，大西和榮：偏微分方程式の数値シミュレーション，東京大学出版会，(1991)
2) 登坂宣好，落合芳博：非線形方程式の境界型解法，日本機械学会2001年度年次大会講演論文集，Vol.Ⅰ，(2001)，pp.27-28
3) 登坂宣好，中山司：境界要素法の基礎，日科技連出版社，(1987)
4) 鷲津久一郎監修，田中正隆，田中喜久明：境界要素法－基礎と応用，丸善株式会社，(1982)
5) P. W. Partridge, C. A. Brebbia and L. C. Wrobel：The Dual Reciprocity Boundary Element Method，Computational Mechanics Publications，(1992)
6) 登坂宣好：偏微分方程式の境界値問題の境界型近似解法，境界要素法論文集，第19巻，(2002)，pp.65-68
7) 具志堅功，登坂宣好：1次元非定常熱伝導問題の境界要素解析，境界要素法論文集，第19巻，(2002)，pp.79-82