

移流拡散方程式への Tangent 変換 CIP 法の適用性

日大生産工（学部） 家塚 史仁
日大生産工 登坂 宣好

1 はじめに

連続体モデルとしての流れの数値シミュレーションの課題は、移流方程式の安定かつ高精度近似スキームの構築である。そのスキームの一つとして CIP 法 (Cubic Interpolated Propagation Method) が存在している¹⁾。CIP 法の特徴は、物理量のみならず微分量をも独立変数として用いることにより、補間精度を向上させていることにある。固体・液体・気体の三態の統一解法として、また圧縮性、非圧縮性流体を統一的に扱える手法として、これまで流体力学をはじめ様々な分野で応用され成果を上げている。しかし、この CIP 法の適用性に関する考察は少ない。

本論では、まず CIP 法の基本的な考えを示した後、2次元の非定常移流拡散方程式に対して同手法を適用し、2つの例について数値計算を行う。また、長い時間ステップでの計算結果について、スキームの適用性を検証する。

2 CIP 法基礎概念

2.1 CIP 法

移流方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (u = \text{const} > 0) \quad (1)$$

の解はよく知られているように、次式で表される。

$$f(x, t) = f(x - ut, 0) \quad (2)$$

これは初期 ($t < 0$) のプロファイルが速度 u で移動することを表している。初期に図 1 の実線のような物理量のプロファイルがあるとす。 $u > 0$ で時間 Δt 移動するとき、厳密解は破線のようなはずである。しかし、データは離散的に、格子点上でしか得られないので、セル内のプロファイルを単純に補間してしまうと点線のようになり、厳密解からはズレたものになってしまう。そこで式(1)を微分すると

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad (g = \partial f / \partial x) \quad (3)$$

となり、 g もまた u で伝播することを表している。従って、物理量同様、微分量も移流させれば、格子点上では移動後のプロファイルに図の太矢印

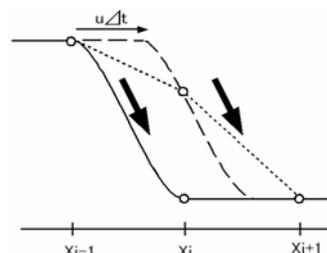


図 1 CIP 法の考え方

のような制限が加わり、メッシュ間のプロファイルが移動前に近くなることになる。

CIP 法では格子点 $i-1, i$ の間のプロファイルを次の 3 次関数で補間する。

$$F_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad (4)$$

4つの未知係数 a_i, b_i, c_i, d_i は関数 $F_i(x)$ が格子点上で与えられた値 f_i, f_{i-1} 及び微分値 g_i, g_{i-1} を取るという次の条件

$$\begin{aligned} F_i(x_i) &= d_i = f_i, \\ \frac{dF_i(x_i)}{dx} &= c_i = g_i, \end{aligned} \quad (5)$$

$$F_i(x_{i-1}) = -a_i\Delta x^3 + b_i\Delta x^2 - c_i\Delta x + d_i = f_{i-1},$$

$$\frac{dF_i(x_{i-1})}{dx} = 3a_i\Delta x^2 - 2b_i\Delta x + c_i = g_{i-1},$$

から未知数が次のように決定できる。

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{g_i + g_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{2(f_i - f_{i-1})}{\Delta x^3}, \\ b_i &= \frac{3(f_{i-1} - f_i)}{\Delta x^2} + \frac{2g_i + g_{i-1}}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (6)$$

ただし c_i, d_i は式(5)で既に与えてある。この結果、次の時刻での値は、このプロファイルを $u\Delta t$ だけ遡ったものであるから

$$\begin{aligned} f_i^{n+1} &= a_i\xi^3 + b_i\xi^2 + g_i^n\xi + f_i^n, \\ g_i^{n+1} &= 3a_i\xi^2 + 2b_i\xi + g_i^n. \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $\xi = -u\Delta t$ 。なお、 $u < 0$ の場合には $i-1$ を $i+1$ に、 $-\Delta x$ を Δx に置き換えればよい。

Applicability to Advection-Diffusion Equation of CIP Method with Tangent Conversion

Fumihito IETSUKA and Nobuyoshi TOSAKA

2.2 Tangent 変換 CIP 法

CIP 法でも十分精度のよい計算が行えるが、物体や液体の表面等の記述にはまだ不十分である。そこで関数変換の方法を用いる。

Tangent 関数変換では式(1)での f を解く代わりに

$$H(f) = \tan(\pi(f - 1/2)) \quad (8)$$

の変換を行う。 H についても式(1)と同じ式が得られることはすぐに分かる。そこで、 f の代わりに H を未知数として式(8)を使い、必要に応じてこの結果を逆変換し f を求める。この変換は物質の境界面を記述する密度関数のように、0 または 1 の指標で表される場合には非常に有効である。

3 2次元非定常移流拡散方程式

次の 2 次元移流拡散方程式へ CIP 法を適用する。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = \kappa \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

ここで、 κ は拡散係数である。左辺を少し変形し

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = \\ - \left(f \frac{\partial u}{\partial x} + f \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \kappa \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \equiv G \end{aligned} \quad (10)$$

としておく。CIP 法では空間微分も必要になる。

$$\frac{\partial f_x}{\partial t} + u \frac{\partial f_x}{\partial x} + v \frac{\partial f_x}{\partial y} = G_x - f_x \frac{\partial u}{\partial x} - f_y \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial t} + u \frac{\partial f_y}{\partial x} + v \frac{\partial f_y}{\partial y} = G_y - f_x \frac{\partial u}{\partial y} - f_y \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (12)$$

ここで、 x, y の下付き添え字は各量での偏微分を表す。

CIP 法では移流項と非移流項を分離して解く。すなわち、まず移流相を計算し

$$(f^n, f_x^n, f_y^n) \rightarrow (f^*, f_x^*, f_y^*)$$

と中間の値を求める。次に非移流相で

$$(f^*, f_x^*, f_y^*) \rightarrow (f^{n+1}, f_x^{n+1}, f_y^{n+1})$$

を求め、次のステップの値とする。

移流相としては

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial f_x}{\partial t} + u \frac{\partial f_x}{\partial x} + v \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_y}{\partial t} + u \frac{\partial f_y}{\partial x} + v \frac{\partial f_y}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

であり、CIP 補間を用いて計算する。非移流相では以下の式を差分近似より求める。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = G, \quad \frac{\partial f_x}{\partial t} = G_x - f_x \frac{\partial u}{\partial x} - f_y \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial t} = G_y - f_x \frac{\partial u}{\partial y} - f_y \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (14)$$

まず、移流相であるが、2次元空間での空間プロファイルは 1 次元同様に 3 次関数で補間する。この補間関数の選び方には幾つかあるが、ここでは以下のような関数を採用した(A 型 CIP)。

$$\begin{aligned} F_{i,j}(x, y) = C_{3,0} X^3 + C_{2,0} X^2 + C_{1,0} X + C_{0,0} \\ + C_{0,3} Y + C_{0,2} Y + C_{0,1} Y \\ + C_{2,1} X^2 Y + C_{1,1} X Y + C_{1,2} X Y^2 \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 $X = x - x_i, Y = y - y_i$ 。これは、1次元CIPをそれぞれの方向に拡張しただけであり、項数が少なくすむので、多次元への拡張には適している。ここには C_{\cdot} の 10 個の未知係数が現れるが、格子点 $(i, j), (i+1, j), (i, j+1)$ でそれぞれ与えられた f, f_x, f_y の値を持ち、点 $(i+1, j+1)$ で $f_{i+1,j+1}$ の値を持つという 10 個の関係を用いると、次のように係数が決定できる。

$$\begin{aligned} C_{3,0} &= \frac{(f_{xiup,j} + f_{xi,j})}{\Delta x^2} - \frac{2(f_{i,j} - f_{iup,j})}{\Delta x^3 \times \text{sign}(u)}, \\ C_{2,0} &= \frac{3(f_{iup,j} - f_{i,j})}{\Delta x^2} + \frac{(f_{xiup,j} + 2f_{xi,j})\text{sign}(u)}{\Delta x}, \\ C_{1,0} &= f_{xi,j}, \quad C_{0,0} = f_{i,j}, \quad C_{0,1} = f_{yi,j}, \\ C_{0,3} &= \frac{(f_{yi,jup} + f_{yi,j})}{\Delta y^2} - \frac{2(f_{i,j} - f_{i,jup})}{\Delta y^3 \times \text{sign}(v)}, \\ C_{0,2} &= \frac{3(f_{i,jup} + f_{yi,j})}{\Delta y^2} + \frac{(f_{yi,jup} + 2f_{yi,j})\text{sign}(v)}{\Delta y}, \\ C_{2,1} &= \frac{-L}{\Delta x^2 \Delta y \times \text{sign}(v)} - \frac{M \times \text{sign}(u)}{\Delta x \Delta y \times \text{sign}(v)}, \\ C_{1,1} &= \frac{-L}{\Delta x \Delta y \times \text{sign}(u) \times \text{sign}(v)} \\ &\quad - \frac{M}{\Delta y \times \text{sign}(v)} - \frac{N}{\Delta x \times \text{sign}(u)}, \\ C_{1,2} &= \frac{-L}{\Delta x \Delta y^2 \times \text{sign}(u)} - \frac{N \times \text{sign}(v)}{\Delta x \Delta y \times \text{sign}(u)}. \end{aligned} \quad (16)$$

ただし、

$$\begin{aligned} L &= f_{i,j} - f_{i,jup} - f_{iup,j} + f_{iup,jup}, \\ M &= f_{xi,jup} - f_{xi,j}, \\ N &= f_{yiup,j} - f_{yi,j}. \end{aligned} \quad (17)$$

ここで

$$iup = \begin{cases} i-1 & (u \geq 0) \\ i+1 & (u < 0) \end{cases}, \quad jup = \begin{cases} j-1 & (v \geq 0) \\ j+1 & (v < 0) \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \quad (19)$$

という記号を導入した。これは u, v の正負によりプログラムを場合分け(2次元ならば上流が4通り存在する)しなくとも良いようにするためである。

非移流相は以下の差分で計算する。式(21), (22)では、式(20)で G の微分がすでに用いられているので、 G_x, G_y を $(f^{n+1} - f^*) / \Delta t$ で置き換えて計算している。これにより、式(21), (22)では G の微分は必要なくなる。

$$f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^* + \left\{ \kappa \left(\frac{f_{i+1,j}^* - 2f_{i,j}^* + f_{i-1,j}^*}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1}^* - 2f_{i,j}^* + f_{i,j-1}^*}{\Delta y^2} \right) - \left(f_{i,j}^* \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - f_{i,j}^* \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \right\} \Delta t, \quad (20)$$

$$f_{xi,j}^{n+1} = f_{xi,j}^* + \frac{f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1} - f_{i+1,j}^* + f_{i-1,j}^*}{2\Delta x} - f_{xi,j}^* \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \Delta t - f_{yi,j}^* \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} \Delta t, \quad (21)$$

$$f_{yi,j}^{n+1} = f_{yi,j}^* + \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1} - f_{i,j+1}^* + f_{i,j-1}^*}{2\Delta y} - f_{xi,j}^* \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \Delta t - f_{yi,j}^* \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \Delta t. \quad (22)$$

2次元の場合にも Tangent 変換 CIP 法では、上記の f の代わりに式(8)で変換される H を用いることは、全く同様である。

4 数値計算例

4.1 Skew Flow 問題

図2に問題設定を示す。メッシュに対して斜め一定方向の流れであり、常に $\|\mathbf{u}\| = 1$ とする。

$\kappa = 10^{-6}$ とし、 20×20 の同サイズの固定正方形格子を使用する。流入境界は不連続(0 または 1)であり、流出境界は自然境界条件($f_n = 0$)とする。2通りの $\theta (= 45^\circ, 67.5^\circ)$ について、計算結果の立面図を図3~6に示す。

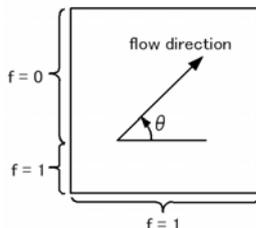


図2 Skew Flow 問題

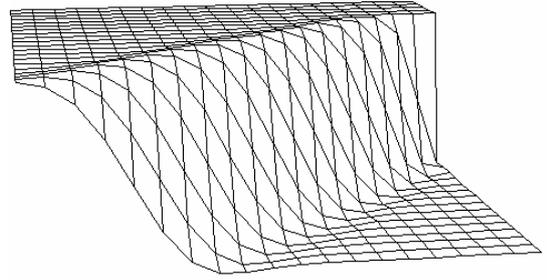


図3 $\theta = 45^\circ$ (CIP 法)

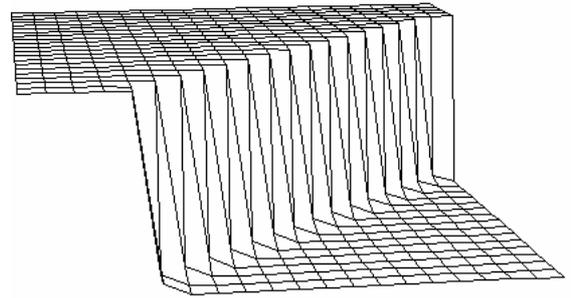


図4 $\theta = 45^\circ$ (Tan 変換 CIP 法)

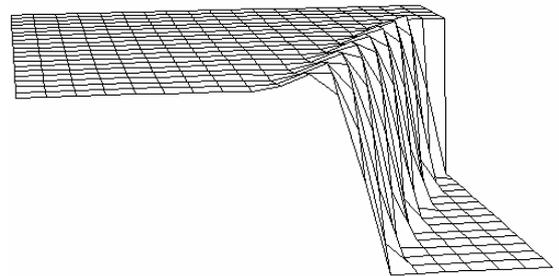


図5 $\theta = 67.5^\circ$ (CIP 法)

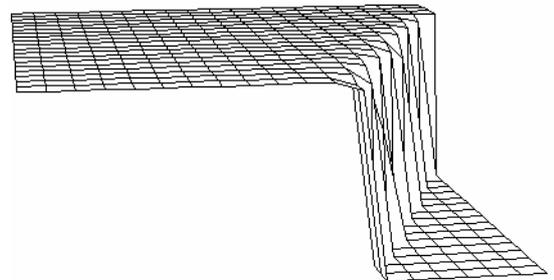


図6 $\theta = 67.5^\circ$ (Tan 変換 CIP 法)

4.2 Rotating Cone 問題

図7に問題設定を示す．初期形状が文字“C”になるよう0または1を与え，一定方向に回転するベクトル場 $(u, v) = (-y, x)$ を与える． $\kappa = 10^{-9}$ とし， 100×100 の固定正方形格子を用いる．境界上では常に値を0とする．1回転後の立面図及び圧力図を図8, 9に，100回転後の立面図を図10に示す．

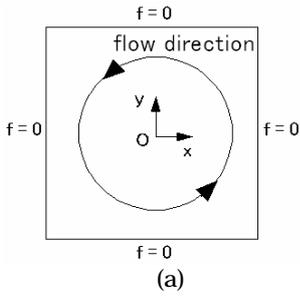


図7 (a) Rotating Cone 問題
(b) 初期状態

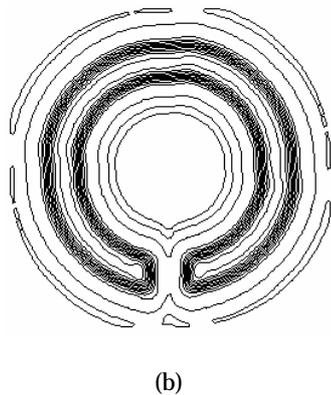
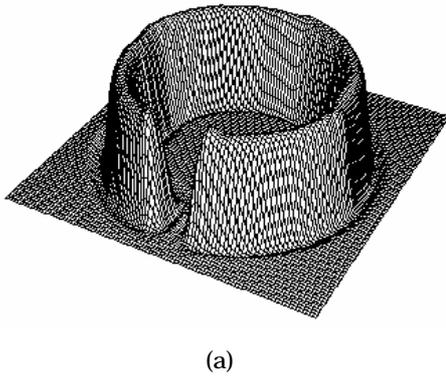
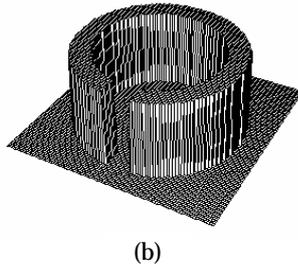


図8 1回転後(CIP法)
(a) 立面図, (b) 圧力図

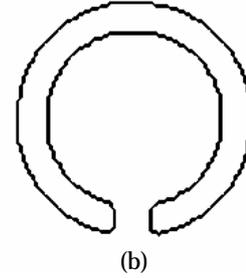
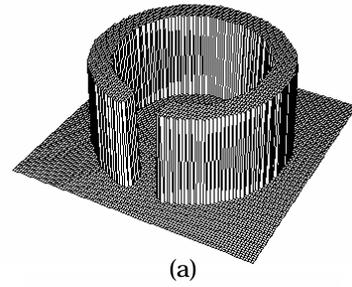


図9 1回転後(Tan変換CIP法)
(a) 立面図, (b) 圧力図

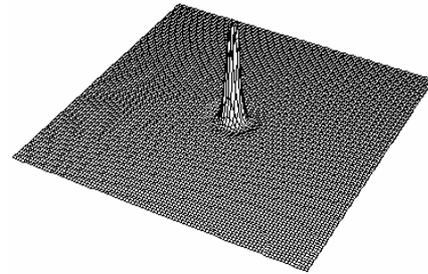


図10 100回転後(Tan変換CIP法)

5 おわりに

本論では，CIP法を2次元非定常移流拡散方程式に適用し，2つの数値計算例について同手法の適用性を検討した．

CIP法単独では二例とも若干オーバーシュートが起こり，また数値拡散もみられる．一方，Tangent変換CIP法では，何れの問題でも境界をシャープに捕らえオーバーシュートもない．式(8)のように簡単な変換でこれだけの効果が得られることは，非常に意味が大きい．しかし，Rotating Cone問題での長い時間ステップでの結果は，初期形状とは全く違ったものとなった．これはSkew Flow問題では流れの方向が常に一定であるのに対し，Rotating Cone問題では流れの方向が常に回転していることが原因と思われる．

今後は，より一般的な方程式へのCIP法の適用性を検討していきたい．

参考文献

- 1) 矢部孝, 内海隆行, 尾形陽一, CIP法, 森北出版, (2003) .
- 2) Brooks, A.N., and Hughes, T.J.R., Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., 32, (1982), pp.199-259.