

## 複雑流れ現象の Large Eddy Simulation

角田 和彦 (数理情報工学科)  
三浦 慎一郎 (都立高専・機械)  
登坂 宣好 (数理情報工学科)

### 1. はじめに

近年、乱流の直接シミュレーション (Direct Numerical Simulation: DNS) による計算が channel 流れのような単純な流れ場に対して可能となり、それらの DNS のデータを通じて Large Eddy Simulation (LES) における Subgrid-scale (SGS) モデルの開発が盛んに行われるようになってきた<sup>1</sup>。しかし、工学的な問題に対しては一般的に大規模かつ高レイノルズ数流れとなり、複雑な形状の流れ場であることが多く、現状では DNS による計算が困難である場合が多い。

その乱流モデル及び数値計算手法の検証として良く用いられている角柱周り流れ問題では、高レイノルズ数 ( $Re = 2.2 \times 10^4$ ) による強い 3 次元性を有し、さらに、流体の角柱壁面への衝突による流れ場の不連続性が生じて角柱前方から上流側に wiggle と呼ばれる擬似的な振動が現れることなどが知られている。そのため、差分法や有限体積法による計算には、対流項に対して上流化 (風上化) 手法を併用した解析スキームが用いられている<sup>2,3</sup>。従って、このような問題では、有限要素法を用いる場合にも何らかの上流化スキーム<sup>4</sup>が必要であると考えられる。

本研究では、指数関数を用いて重み関数を構成し上流化を図る立場の指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法<sup>5</sup>を用いて、LES による乱流解析を展開する。指数関数型の重み関数は、移流拡散方程式の一般解に基づいて構成されている。また、効率よく乱流粘性の効果を取り込むためには高次精度の上流化手法が必要となるが、差分法による解析では境界条件の複雑さが伴い、汎用性に欠けている。しかし、指数関数型の重み関数を用いた場合でも有限要素法の利点でもある境界条件の容易さは失われず、汎用性にも優れている。

また、通常、質量行列には集中化を行い計算負荷の軽減を図っているが、乱流計算のような長い時間の計算を必要とする問題に対し、集中化に伴う誤差の影響は無視できないと考え、本計算では移流拡散問題でその有効性が示されている multi-pass algorithm<sup>6,7</sup>を用いる。一方、LES における SGS モデルには、Deardorff らが用いた Smagorinsky モデル<sup>8,9</sup>を採用する。Smagorinsky モデルは、角柱周り流れ問題におけるワークショップ<sup>10,11</sup>において、他のモデルと遜色の無い結果が得られていることと、比較的取り扱いが容易であるということが挙げられる。さらに、壁

面付近での速度勾配の影響に伴う SGS 粘性効果の過大な評価を押さえるために、Van Driest 型の減衰関数<sup>12</sup>を用いる。これらの検証例題として角柱周り流れを通じて、せん断領域、及び角柱後流域における乱流統計量を Lyn らの実験データ<sup>13-15</sup>との比較を通して考察する。

### 2. LES 基礎方程式

**2.1 Filtered Navier-Stokes 方程式** LES の基礎微分方程式として以下の空間に関するフィルタリングされた Navier-Stokes 方程式と連続の方程式を考える。

$$\dot{\bar{u}}_i + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = -\bar{p}_{,i} + \frac{1}{Re} \bar{u}_{i,jj} - \tau_{ij,j} \quad (1)$$

$$\bar{u}_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ただし、 $Re$  はレイノルズ数、 $\tau_{ij}$  は SGS 応力である。さらに、 $\tau_{ij}$  は次のように与えられる。

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (3)$$

$$= \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u_i' u_j'} + \overline{u_i' \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u_j'} \quad (4)$$

ここで、SGS 応力をレオナード項  $L_{ij}$ 、クロス項  $C_{ij}$ 、レイノルズ応力項  $R_{ij}$  に分けて表すと以下ようになる。

$$\begin{cases} L_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \\ C_{ij} = \overline{u_i u_j'} + \overline{u_i' \bar{u}_j} \\ R_{ij} = \overline{u_i' u_j'} \end{cases} \quad (5)$$

SGS 応力  $\tau_{ij}$  のうち  $L_{ij} + C_{ij} = 0$  として、レイノルズ応力項  $R_{ij}$  のみをモデル化する。

**2.2 Smagorinsky model** レイノルズ応力のモデル化として Smagorinsky モデルを用いることにすると、以下ようになる。

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} k_{sgs} - 2\nu_t \bar{S}_{ij}, \quad k_{sgs} = \frac{1}{2} \overline{u_k' u_k'} \quad (6)$$

$$\nu_t = (C_s f_w \Delta)^2 \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (7)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (8)$$

$$\Delta = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3} \quad (9)$$

$$f_w = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{25}\right), \quad y^+ = \frac{u\tau y}{\nu} \quad (10)$$

ここで、 $\nu_t$  は SGS 渦粘性係数であり、 $\Delta$  はフィルター幅、 $k_{sgs}$  は SGS の乱流エネルギー、 $f_w$  は Van Driest 型の壁

面減衰関数であり、壁面からの距離で定義される  $y$  と壁面摩擦速度  $u_\tau$  を用いて、Smagorinsky 定数  $C_s$  に乗じる。

**2.3 Fractional step 法** 運動方程式 (1) と連続の方程式 (2) の計算のアルゴリズムに分離解法の一つである fractional step 法を用いると、次式のように表せる<sup>16</sup>。

$$\dot{\bar{u}}_i + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j} = \frac{1}{Re} \bar{u}_{i,jj} + (2\nu_t \bar{S}_{ij})_{,j} \quad (11)$$

$$\dot{\bar{u}}_i = -\bar{P}_{,i}, \quad \bar{u}_{i,i} = 0 \quad (12)$$

ただし、 $\dot{\bar{u}}_i = \dot{\bar{u}}_i(\bar{u}_i, \bar{u}_i^n) + \dot{\bar{u}}_i(\bar{u}_i^{n+1}, \bar{u}_i)$ ,  $\bar{P} = \bar{p} + 2/3 k_{sgs}$ 。

方程式 (12) に対しては、修正速度ポテンシャル関数  $\phi$  を用いて、圧力を陰的に求める。

$$\phi_{,ii} = -\dot{\bar{u}}_{i,i} \quad (13)$$

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i + \phi_{,i} \quad (14)$$

$$\bar{P}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \phi \quad (15)$$

ただし、 $\Delta t$  は時間増分、 $\bar{u}_i^{n+1}$  は  $(n+1)$  時間ステップでの  $\bar{u}_i$  の値を表す。

### 3. 有限要素方程式

**3.1 指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法** 式 (11)

に対して、任意の重み関数  $w^*$  を用いて積分表現を与える。さらに、発散定理を用いることにより次の弱形式表現を得る。

$$\int_{\Omega_e} \left\{ \dot{\bar{u}}_i + \bar{u}_j \bar{u}_{i,j}^n \right\} w^* d\Omega + \int_{\Omega_e} \left( \frac{1}{Re} + \nu_t^n \right) \bar{u}_{i,j}^n w_{,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma_e} \tau_i^n w^* d\Gamma \quad (16)$$

ただし、 $\Omega_e$  は全体領域  $\Omega$  の部分領域、 $\Gamma_e$  はその境界を表し、 $\tau_i = (1/Re + \nu_t) \bar{u}_{i,j} n_j$  である。

ここで、式 (16) は移流拡散型の方程式であり、高レイノルズ数を有する流れに対して通常の Galerkin 有限要素法を用いた場合、数値振動を起こしやすい。従って、本研究では指数関数を用いて上流化を図る指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素方程式を構成する<sup>5,16</sup>。式 (16) の重み関数を  $w^* = M_\alpha w_\alpha$  とし、 $M_\alpha$  に次の指数関数を用いた関数を与える。

$$M_\alpha = \sum_{\gamma,i} N_\alpha e^{-a_i(N_\gamma x_i^\gamma - x_i^\alpha)} \quad (17)$$

ここで  $N_\alpha$  は通常良く使われる双一次補間関数であり、係数  $a_i$  は次式で与えられる。

$$a_i = \frac{\alpha_i}{|L_i|} \text{sgn}(\hat{u}_i^n) \quad (\text{no sum on } i) \quad (18)$$

ここで、 $\hat{u}_i^n$  は各要素での平均流速であり、 $\text{sgn}(\ast)$  は、要素における上流側を決定するための符号関数である。さらに、 $L_i$  は個々の要素の  $i$  方向の代表長さで、 $N_\alpha$  は双

一次の補間関数である。 $\alpha_i$  は、スケーリングパラメータと呼ばれる上流化の割合を調節するパラメータである。

さらに  $\bar{u}_i$  に対して双一次の補間関数を用いて、時間積分に関しては 2 次精度 Adams-Bashforth 法を適用すると次の有限要素方程式を得る<sup>16</sup>。

$$M_{\alpha\beta} \frac{\{\bar{u}_i\}_\beta - \{\bar{u}_i^n\}_\beta}{\Delta t} = \frac{1}{2} (3F_{i\alpha}^n - F_{i\alpha}^{n-1}) \quad (19)$$

ここで、

$$F_{i\alpha}^n = -K_{\alpha\beta}(\bar{u}_j^n) \{\bar{u}_i^n\}_\beta - D_{\alpha\beta}^n \{\bar{u}_i^n\}_\beta + f_{i\alpha}^n \quad (20)$$

ただし、各行列の定義は文献 [16] に従う。

**3.2 Multi-pass algorithm** 式 (19) に関する全体系の有限要素方程式

$$MU = F \quad (21)$$

に対して、multi-pass algorithm を用いて、質量行列を次のように陽的に評価する<sup>16</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \overline{MU}^{(k)} &= F - (M - \overline{M}) U^{(k-1)} \\ U^{(k)} &= \{\bar{u}_i - \bar{u}_i^n\} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ここで、 $\overline{M}$  は集中質量行列であり、 $U^{(0)} = 0$  のもとで反復計算を行い未知量  $\bar{u}_i$  を求める。なお  $k$  は反復回数であり、 $k=1$  では集中質量行列を用いたものと一致する。

### 4. 数値計算例

**4.1 解析領域及び計算条件** 本手法の適用性を検討するために、角柱周り流れ問題をとりあげる。解析領域及び境界条件を Fig. 1(a) に示す。境界流入部から代表速度  $U_0$  の乱れのない一様流を与える。このとき代表長さを角柱一辺の長さ  $D$  としたときのレイノルズ数 ( $Re$ ) は、実験との比較を行うために  $2.2 \times 10^4$  とした。境界流出部は自由境界条件、スパン方向は周期境界条件を課す。また、角柱上の節点は Non-slip 条件を与え、Smagorinsky 定数は 0.1 に設定した。解析領域は主流 ( $x_1$ ) 方向に  $20D$  (角柱上流側に  $4.5D$ , 後流に  $14.5D$ )、直交 ( $x_2$ ) 方向に  $14D$ 、角柱スパン ( $x_3$ ) 方向に  $4D$  とした。その他の計算条件及び各種パラメータを Table 1 に示す。

計算は 2 種類の異なる要素分割により行った。Case 1 として粗い要素分割による場合と、主流方向及び、垂直方向に対して要素分割を若干増やした Case 2 である (Table 2 参照)。

時間平均量の算出は、初期の依存性が無くなったと判断される時刻 (無次元時間で 60) から、Case 1, Case 2, それぞれ無次元時間で 110(52,000step), 40(16,000step) の計算により統計量を算出した。

Fig. 1(b) に角柱側面における剥離域を計算する場所を示すための概念図を示す。

**4.2 計算結果** Fig. 2は、角柱側面の剥離領域内 ( $x_1 = 0$ ) での主流方向の流速と、主流方向成分、垂直方向成分の各乱流強度さらにレイノルズ応力について、実験データと比較したものである。Fig. 2(a) から、壁面付近での逆流領域及びそのピーク値がやや十分ではないが、せん断層領域は、十分に一致した結果が得られている。また、メッシュの違いによる差異はほとんど見られないことが分かる。Fig. 2(b)においては、せん断層領域における主流方向の乱流強度のピーク値が Case 2 の方は、ほぼ実験値に一致しているのに対して、Case 1 は、十分な値でない事が分かる。しかし、ともに定性的な一致は得られている。一方、Fig. 2(c)における垂直方向の乱流強度  $\langle u_2' u_2' \rangle$  は、両ケースとも定性的にも一致していない。これらの傾向は、Dynamic SGS モデルを用いた野澤ら<sup>17</sup>の結果にも見られる事であり、SGS モデルやスパン方向への要素分割の不十分さだとは考えにくい。ワークショップの中で、比較的实验に近い結果を得ている。Wang ら<sup>18</sup>の結果から考えると、数値粘性が大きく関係しているのではないと思われる。Wang らは、Smagorinsky モデルを用いても計算スキームに中心差分を用いることで、良好な結果を得ている。Fig. 2(d) は、レイノルズ応力の結果を示したものである。Case 2 の方が、実験値に近い値を示していることがわかる。

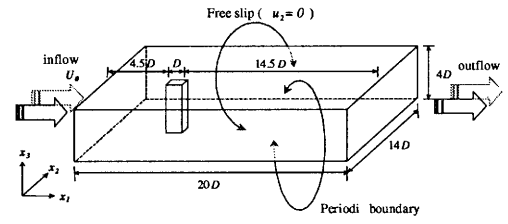
Fig. 3は、スパン方向中心断面における角柱後方での主流方向の流速、そして乱流強度の主流方向成分、垂直方向成分の各時間平均量に対する比較を行ったものである。Fig. 3(a)より Case 1, Case 2 共に逆流のピーク値が十分ではないが、 $1 < x_1 < 2.5$  までの範囲では実験結果に近い結果が得られている。持田ら<sup>19</sup>によれば、Smagorinsky モデルと壁面減衰関数を用いた場合、逆流領域が小さく評価されることを示している。このような考えであれば、この結果は妥当なものだと言える。Fig. 3(b)は主流方向の乱流強度  $\langle u_1' u_1' \rangle$ 、また、Fig 3(c)は垂直方向の乱流強度  $\langle u_2' u_2' \rangle$  を示したものである。 $\langle u_1' u_1' \rangle$  は定性的には似ているものの、ピーク値が大きく評価されていることが分かる。特に Case 1 ではその差が顕著に表れている。しかし、 $\langle u_2' u_2' \rangle$  は定性的な一致が得られ、特に Case 2 の方が実験結果と良く一致している。この結果から、角柱後方付近での十分な要素分割が必要であることを示している。

Table 1 A summary of the parameters

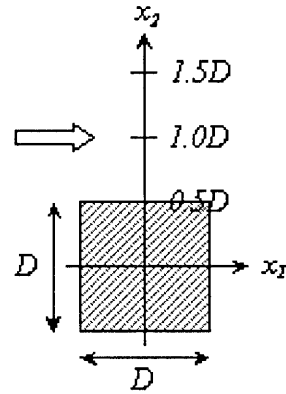
$Re$	$C_s$	$\Delta t$	Scaling parameters
22,000	0.10	0.0025	0.5

### 5. おわりに

複雑流れの現象を対象とした LES 基礎微分方程式に対して、空間に関する離散化に指数関数型 Petrov-Galerkin 有

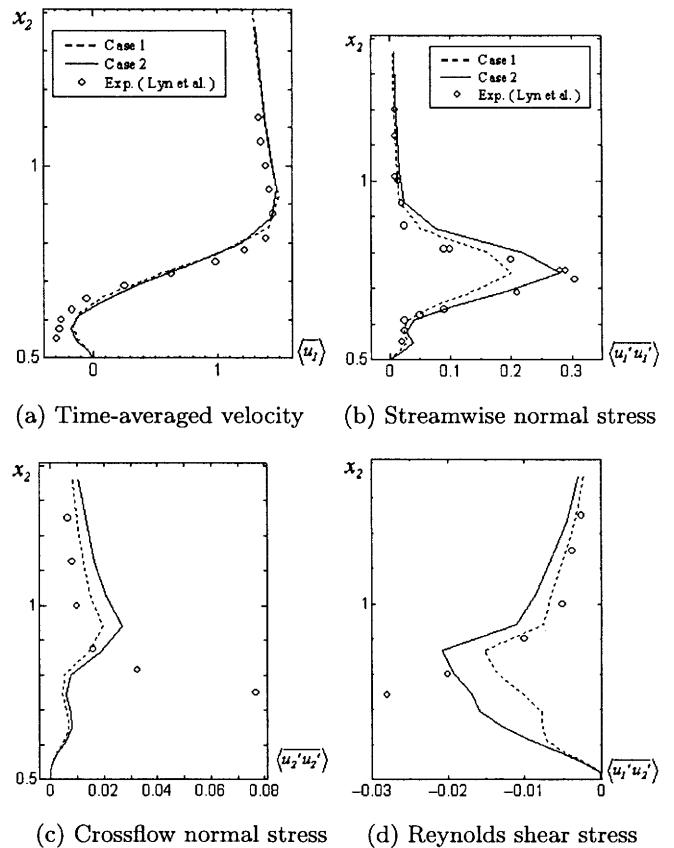


(a) Geometrical configuration and boundary conditions



(b)  $x_2$ -axis measured from the side wall

図 1: Flow around a rectangular cylinder



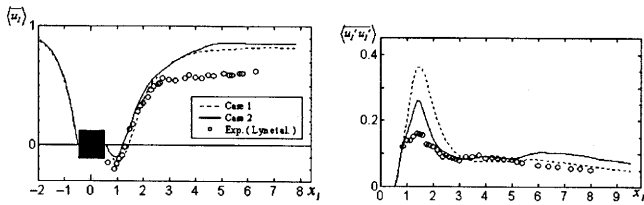
(a) Time-averaged velocity (b) Streamwise normal stress

(c) Crossflow normal stress (d) Reynolds shear stress

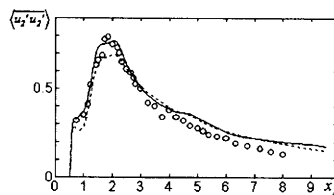
図 2: Lateral distributions of the time-averaged velocity and stresses

Table 2 A summary of different meshes

	$E_1 \times E_2 \times E_3$	Total elements	$\Delta x_{min}$
Case 1	$88 \times 68 \times 8$	39232	$0.022D$
Case 2	$102 \times 80 \times 8$	60672	$0.018D$



(a) Time-averaged velocity (b) Streamwise normal stress



(c) Crossflow normal stress

図 3: Streamwise distributions of the time-averaged velocity and stresses

限要素法の定式化を行い、時間積分には2次精度 Adams-Bashforth 法を適用し、さらに質量行列には、multi-pass algorithm を用いて精度の向上を図った。具体的な数値計算例として角柱周り流れ問題を通して、せん断領域及び角柱後方での時間平均流速、また得られた乱流統計量を Lyn らの実験結果と比較した。その際、計算には2種類の有限要素メッシュを用いて計算結果の比較検討を行った。今回の角柱周り流れの解析を通して、以下のことが明らかになった。

1. 粗い要素分割を用いた場合、流速に関しては顕著な差異が見られなかったが、乱流統計量に関しては異なる結果が見られた。
2. 粗い要素分割を用いた場合でも実験との比較は、差分法などと比べても遜色の無い結果が得られた。これは、本手法の有効性を裏付けるものである。
3. いくつかの乱流統計量に、上流化の組み立て方の違う差分法による結果との類似が見られ、このことから上流化による乱流統計量への影響が、有限要素法の解析においても同じ振る舞いをしているものと考えられることができる。

今後の課題として、上流化による乱流統計量に及ぼす影響など調べる必要があると考えている。

#### 参考文献

1. 大宮司久明・三宅裕・吉澤徹 編, 乱流の数値流体力学, 東

京大学出版社 (1998).

2. K. Nozawa and T. Tamura, Direct and Large-Eddy Simulation II, EROCOFTAC Series 5(1996), 409-412.
3. Kawashima, N. and Kawamura, H., Direct and Large-Eddy Simulation II, EROCOFTAC Series 5(1996), 413-422.
4. 登坂宣好, 応用数理学学会誌, 7-2(1997), 34-52.
5. 角田和彦・登坂宣好, 建論, 439(1992), 189-198.
6. Donea, J., Giuliani, S., and Laval, H., *Comp. Meth. Appl. Engrn.*, 45(1984), 123-145.
7. 三浦慎一郎・角田和彦・登坂宣好, 第13回東大生研NSTシンポジウム講演論文集 (1998), 1-4.
8. Smagorinsky, J., *Mon. Weath. Rev.*, 91(1963), 99-165.
9. Deardorff, J.W., *J. Fluid Mech.*, 41(1970), 453-480.
10. W.Rodi, *J. Wind Eng. and Ind. Aerodyn.*, 46, 3-19, 1993
11. Voke, P. R., Direct and Large-Eddy Simulation II (*Proceeding of the EROCOFTAC Workshop held in Grenoble, France*), EROCOFTAC Series 5(1996), 355-373.
12. Van Driest, *J. Aero. Sci.*, 23(1956), 1007-1011.
13. Lyn, D. A., Einav, S., Rodi, W. and Park, J.-H., *J. Fluid Mech.*, 267(1994), 285-319.
14. Lyn, D. A. and Rodi, W., *J. Fluid Mech.*, 267(1994), 353-376.
15. Lyn, D. A., EROCOFTAC Fluid Dynamics Database Case 43(1992).
16. S. Miura, K. Kakuda and N. Tosaka, *Int. J. Comp. Fluid Dyn.*, 12(1999), 291-299.
17. 野澤剛二郎・田村哲郎, 第10回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (1996), 174-175.
18. Wang, G. and Vanka, S.P., EROCOFTAC Series 5(1996), 397-400.
19. 持田灯・村上周三・富永禎秀, 生産研究, 47-2(1995), 43-48.