

マーカ-粒子有限要素法による自由表面流れの数値計算

登坂 宣好 (数理情報工学科) 繁田 岳美 (PD)

1 はじめに

自由表面流れ問題は流体領域が時間に依存し、領域の境界が時々刻々と変化する問題である。このような問題は移動境界問題の一つとして知られている。

マーカ-粒子法は、流体領域内部に多数配置された個々のマーカ-を追跡することで流体の流れを表現する手法であり、自由表面流れ問題の数値解法として用いられる。従って、自由表面問題に対する他の解法と異なり領域の要素再分割が不要であるため、複雑な流れにも対応できる利点を有する。

本プロジェクトでは、本年度、2次元の非圧縮性粘性流体を仮定し、三角形有限要素を用いた従来のマーカ-粒子法の問題点を回避した手法を提案し、数値計算を行った^{1), 2)}。

2 問題設定

2次元有界領域 $\hat{\Omega}$ を固定領域とし、時刻 t に依存する流体領域 $\Omega(t)$ が $\hat{\Omega}$ 内部に存在する。位置 \mathbf{x} 、時刻 t における流速と単位密度あたりの圧力を、それぞれ $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$ と表す。対象とする流体は非圧縮性粘性流れであると仮定する。

流体が固定領域の境界に接する部分を $W(t) := \partial\Omega \cap \partial\hat{\Omega}$ 、流体領域 $\Omega(t)$ の自由表面を $S(t) := \partial\Omega(t) \setminus \partial\hat{\Omega}$ で表す (図 1)。

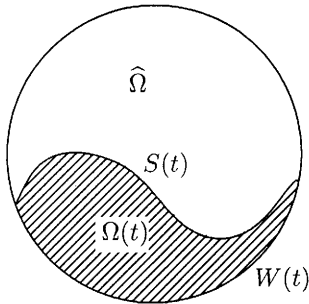


図 1 自由表面を有する流体領域

応力テンソル σ を次式で定義する:

$$\begin{aligned} \sigma &:= -pI + 2\nu\varepsilon(\mathbf{u}), \\ \varepsilon(\mathbf{u}) &:= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T). \end{aligned}$$

ここに、 I は単位行列、 ν は動粘性係数を表す。

以上より、問題は次の Navier-Stokes 方程式と連続の式に対する初期値境界値問題として述べられる:

問題 1 以下を満たす \mathbf{u} と p を $\Omega(t) \times (0, T)$ において求めよ:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega(t) \times (0, T), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega(t) \times (0, T), \quad (2)$$

境界条件として、壁面上では滑り条件:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } W(t) \times (0, T),$$

自由表面上では応力の平衡条件:

$$\sigma\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on } S(t) \times (0, T)$$

を、また初期条件として

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{in } \Omega(0) \times \{0\}$$

を課す。ここに、 $T > 0$ は与えられた定数、 \mathbf{f} は $\Omega(t)$ 内で既知の物体力、 \mathbf{n} は境界 $\partial\Omega(t)$ 上の外向き単位法線ベクトル、 \mathbf{u}_0 は既知の初期流速を表す。特に、重力加速度 g に対して、 $\mathbf{f} := (0, -g)$ とおく。

3 流速修正法による半離散化

(1), (2) に分離解法の一つである流速修正法を適用し、速度場と圧力場を別々に取り扱う。

初期時刻 $t_0 = 0$ と時間増分 Δt を用いて、第 n 段階時刻を $t_n = t_{n-1} + \Delta t$ ($n = 1, 2, \dots, [T/\Delta t]$) とする。時間微分を1次の前進差分で近似すると、(1), (2) から以下の陰的半離散化式を得る (以下、特に断らない限り、方程式は $\Omega(t_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots, [T/\Delta t]$) 内で考える):

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^n \\ = -\nabla p^{n+1} + \nu\nabla^2\mathbf{u}^n + \mathbf{f}, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0. \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{u}^n(x)$, $p^n(x)$ はそれぞれ、真の $\mathbf{u}(x, t_n)$, $p(x, t_n)$ に対する半離散近似解を表す。

(3) より、以下を得る:

$$\mathbf{u}^{n+1} = -\Delta t \nabla p + \tilde{\mathbf{u}}^n. \quad (5)$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{u}}^n$ は以下で定義された流速の予測子としての中間流速を表す:

$$\tilde{\mathbf{u}}^n := \mathbf{u}^n - \Delta t [(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n - \mathbf{f}].$$

(5) の発散を取り、非圧縮の連続条件 (4) を考慮すると、圧力に関する以下の Poisson 方程式を得る:

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^n). \quad (6)$$

(6) に対する新たな境界条件として、

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= 0 \quad \text{on } S(t_n), \\ \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} &= 0 \quad \text{on } W(t_n) \end{aligned}$$

を課す。

4 マーカー粒子法

領域 $\hat{\Omega}$ を三角形 1 次の有限要素に分割する。自由表面を識別するために、流体領域内部全体にマーカーを配置する。このとき有限要素は、マーカーを含まない空要素、マーカーを含み空要素と隣接する表面要素、マーカーを含み空要素に隣接しない流体要素の 3 種類の要素に分類される。空要素は液体に接する気相を表し、自由表面は表面要素内部に含まれると考えられる。流体要素と表面要素の全体が近似流体領域を、空要素と表面要素の共有辺の全体が近似自由表面を構成する (図 2)。

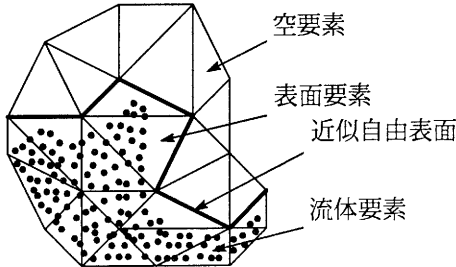


図 2 要素の分類と近似自由表面

あるマーカーの第 n 段階時刻における位置を \mathbf{x}^n とすると、

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^n) \quad (7)$$

に従って、このマーカーは位置 \mathbf{x}^{n+1} へ移動する。ここに、 $\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^n)$ はマーカーの速度、すなわち位置 \mathbf{x}^n における第 $n+1$ 段階時刻の流速を表す。

節点 i を共有する要素全体からなる集合を $E(i)$ で表す (図 3) :

$$E(i) := \{e; P(e) \ni i\}.$$

ここに、 $P(e)$ は要素 e の節点全体の集合を表す。要

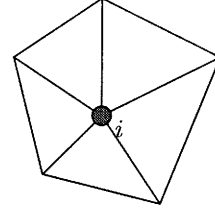


図 3 節点 i を共有する要素

素 e に対して、写像 N を

$$N(e) := \begin{cases} 1 & (e \text{ はマーカーを含む}) \\ 0 & (e \text{ はマーカーを含まない}) \end{cases}$$

と定め、

$$M(i) := \sum_{e \in E(i)} N(e)$$

とおく。集合 $E(i)$ の元の個数を $l_i := |E(i)|$ で表すと、 l_i は節点 i を共有する要素数を表す。

このとき、節点 i は次のいずれかに分類される (図 4) :

- すべての $e \in E(i)$ が空要素、すなわち $M(i) = 0$ ならば、節点 i は気相内部にある。
- すべての $e \in E(i)$ が流体/表面要素、すなわち $M(i) = l_i$ ならば、節点 i は液体内部にある。
- ある $e_1, e_2 \in E(i)$ が存在して、 e_1 が空要素、 e_2 が流体/表面要素、すなわち $1 \leq M(i) \leq l_i - 1$ ならば、節点 i は近似自由表面上にある。

従って、近似自由表面 $S_h(t)$ 上の節点座標全体は

$$\{\mathbf{x}_i; 1 \leq M(i) \leq l_i - 1\} \subset S_h(t)$$

と書ける。ここに、 \mathbf{x}_i は節点 i の座標を表す。上式は、近似自由表面上の節点を求める方法を示唆していることに注意する。実際の解析対象となる時刻 t における近似流体領域 $\Omega_h(t)$ は

$$\overline{\Omega_h(t)} = \bigcup_{N(e)=1} \bar{e}$$

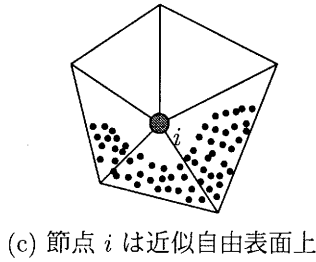
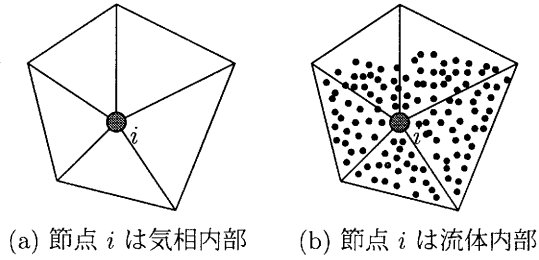


図 4 節点の分類

を満たす。ここに、 $\bar{\cdot}$ は集合の閉包を表す。これより、有限要素法において、マーカ-を含む要素のみから得られる要素行列を重ね合わせて全体行列を作成すればよいことがわかる。

次に、マーカ-が要素間を移動する際、移動先の要素を決定する方法を述べる。従来の手法³⁾は、着目するマーカ-が有限要素間を移動する際、マーカ-を現在含む要素に対して辺で隣接する要素のいずれかに移動する考え方に基づいている。辺で隣接する要素は高々3個であり、マーカ-の追跡手法として簡潔であるのが特徴である。しかし、マーカ-が要素節点近傍を通過して要素間を移動する場合、時間増分を非常に小さく取らないとマーカ-は隣接する要素を飛び越える可能性が高い。すなわち、マーカ-の現在属す要素に対して辺で隣接する要素が、必ずしもマーカ-の移動先になるとは限らない。また、マーカ-が要素節点上を通過する場合、マーカ-の移動先は辺で隣接するいずれの要素でもないため(図5(a))、この従来のアルゴリズムは不十分であると思われる。従って、マーカ-の追跡を正確に行うためには、マーカ-の属す要素に対して辺だけでなく点のみで隣接する要素についても、移動後のマーカ-が属すかどうかを判別する必要が生ずる(図5(b))。

そのために、要素 e に対して辺や点で隣接する要素を予め求める。これは、要素 e の各節点 $i \in P(e)$

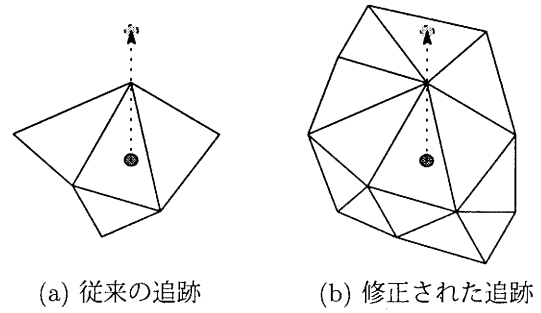


図 5 マーカ-追跡

を共有する要素すべてを求めることで得られる:

$$F(e) := \bigcup_{i \in P(e)} E(i) \quad (\text{なお, } e \in F(e) \text{ である}).$$

すべての要素 $e' \in F(e)$ について着目したマーカ-の存在の有無を調べれば、マーカ-が要素 e の節点上やその近傍を通過する場合も問題なくマーカ-の追跡を行える。すべての要素 $e' \in F(e)$ 内部に着目したマーカ-が存在しないときは、マーカ-は要素 e' を飛び越えている。このような場合も考慮し、(7)の代わりに次のようにマーカ-を追跡する。有限要素分割幅に応じて自然数 m を固定し、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{n+1,(j)} &= \mathbf{x}^n + \frac{j\Delta t}{m} \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^n) \\ & \quad (\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^{n+1,(m)}) \end{aligned}$$

として求められた位置のマーカ-がどの要素に属すかを各 $j = 1, 2, \dots, m$ に対して判定すればよい。十分大きな m を与えることで、マーカ-が要素を飛び越える問題を避けることができる。

なお、マーカ-が要素内部に存在するかどうかの判定には、面積座標を用いる^{3), 4)}。マーカ-の要素 e における面積座標がすべて正なら、マーカ-は要素 e に属し、面積座標のいずれか1つが負なら、マーカ-は要素 e の外側にあることがわかる。

5 数値計算例

本節では、数値計算例として水柱崩壊問題を考える。境界が壁面であるような固定領域 $\hat{\Omega}$ を単位正方形とし、初期状態の流体領域 $\Omega(0)$ を幅 0.3、高さ 0.6 の長方形とする(図6)。初期流速を $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ とおく。代表長さを $L = 0.3$ 、代表流速を \sqrt{gL} として無次元化すると、無次元物体力は $\mathbf{f}/g = (0, -1)$ となる。Reynolds 数を $Re = \sqrt{gL^3}/\nu = 500$ とする。固定領域 $\hat{\Omega}$ を計算領域とし、節点数 2601、

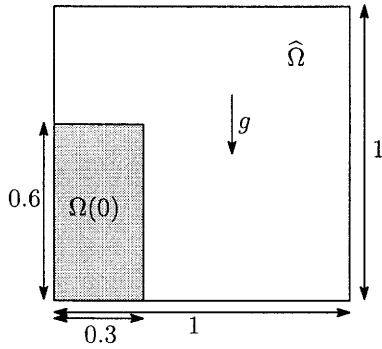


図 6 水柱崩壊問題

要素数 5000 の三角形有限要素に一様分割し，無次元時間刻み幅を $\Delta t\sqrt{g/L} = 10^{-3}$ とする．流体領域 $\Omega(0)$ 内部全体に，隣り合うマーカー間の距離が 0.005 となるようにマーカーを一様に配置する．このとき，マーカーの総数は 7021 である．

以上の設定の下で得られたマーカー分布の無次元時間 $1.0 \leq t\sqrt{g/L} \leq 6.0$ における数値結果を図 7 に示す．特に図 7(b) から，右側の壁面に当たった流体が初期の水柱の高さ以上に跳ね上がることが確認できる．無次元時間約 16.0 で流体は定常状態になった．このときの流体の面積は初期状態の流体の面積とほぼ一致すると見なせた．従って，非圧縮条件を満たしているといえる．

なお，各マーカーに異なる色を付けることで，流体の流れに従って，個々のマーカーの位置変化の様子を見ることができると注意する．

6 おわりに

マーカー粒子法を三角形有限要素法に適用したアルゴリズムを修正し，数値計算例として水柱崩壊問題を考えた．有限要素分割を細かくすることで，本来の自由表面と近似自由表面の形状の差を小さくでき，また，マーカー粒子を流体内部全体に多数配置することにより，定性的に妥当な数値結果を得ることができたと考えられる．

今後は，この数値結果と既存の実験結果を比較することで，数値結果の定量的な検討を行う必要がある．現在の手法は，計算過程で本来の自由表面の位置を認識することはできないため，自由表面上ではなく近似自由表面上に境界条件を課することになる．そこで，荒い有限要素分割でも妥当な数値結果が得られるように，自由表面に適切な条件が満たされるような境界条件を近似自由表面上に課すこと

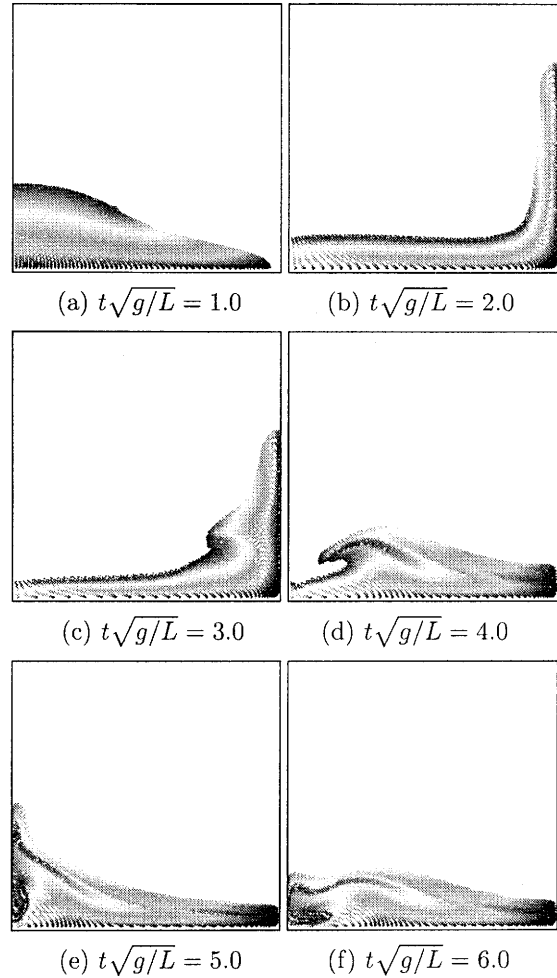


図 7 マーカー分布

を試みる．

参考文献

- 1) 繁田岳美，登坂宣好：三角形有限要素を用いたマーカー粒子法のアルゴリズムの考察，日本機械学会第 16 回計算力学講演会講演論文集 (2003)，pp. 153-154.
- 2) 繁田岳美，登坂宣好：マーカー粒子を用いた自由表面流れ問題の有限要素解，第 9 回日本計算工学会講演会 (2004 発表予定)．
- 3) 数値流体力学編集委員会 編：数値流体力学シリーズ 4 移動境界流れ解析，東京大学出版会 (1995)．
- 4) Nakayama, T. and Mori, M.: An Eulerian finite element method for time-dependent free surface problems in hydrodynamics, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 22 (1996), pp. 175-194.