

# サイロ容器の動的解析に必要な座屈前と後の換算質量と振動応答に関する研究

渡邊 健 (大学院生)  
柴田 耕一 (数理情報工学科)

## 1.はじめに

1981年、構造物の耐震設計に関して基準法が改正され、地震に対する強さを「強度」だけではなく、構造特性係数を導入し、「ねばり強さ」でも評価しようとする、保有耐力設計法<sup>1)</sup>が示された。したがって、サイロ容器のように座屈後剛性が急激に退化する振動系の座屈前から座屈後までも含めた動的挙動の把握を可能にする解析手法の研究は、容器構造の保有耐力設計法を発展する上で重要であった。

サイロ容器のように、中に粉体が入った場合の振動に関して、サイロの殻体と粉体の扱いについて、振動モデルを確立する必要があった。サイロの殻体横揺れに関しては、シェル理論、梁理論、有限要素法等があり、さらに簡単な質点系に置き換えることが可能であった。一方、粉体の質量についても同様に振動モデルに置き換える必要が生じた。

1980年<sup>2)</sup>、粉体入りの試験体及び、実大サイロ等の振動実験と固有値解析を併用することにより、粉体の質量効果としての有効質量を求めた。その結果、粉体はサイロの横揺れに対して、実質量の0.7~0.8倍でモデル化出来ることが明らかとなった。また、サイロ容器全体の有効換算質量は座屈前と座屈後では異なることも明らかである。

我々は長年にわたり、サイロ容器の振動モデル及び振動応答解析手法を追究し、近年これを確立するに至った。しかし、研究を進めるにつれ、サイロ容器の換算質量は座屈前と座屈後では異なるため、手法の追究と応答解析による確認が必要となった。

そこで本論では、座屈前と座屈後における有効換算質量について追究するとともに、正弦波を入力加速度とし、無傷の試験体に対する振動台上実験を座屈前から座屈後までを含めて行い、実験値と応答解析結果とを直接比較検討することによってサイロ容器の有効換算質量について検証した。

## 2.試験体について

実験に用いた試験体は、アルミ製薄肉円筒容器である(表1)。本論のような模型実験では、粉体と殻体との間の摩擦の影響による軸力が生じにくいため、上部におもり( $W_2$ :(346.03[N]))を載荷

し、軸力比は0.1とした。軸力比とは、内容物を考慮しない試験体の軸力の垂直限界座屈荷重(3138.03[N])に対する割合であり、軸力比0.1とは、軸力321.46[N]に相当する。また、振動時の内容物として粉体には標準砂(山口県豊浦の山砂)を用い、その量は試験体内を満杯とする83.36[N]とした。

## 3.固有振動数の解析手法

これは、横揺れの1次モードに限った線形理論で、曲げとせん断撓みとから最大運動エネルギーと最大位置エネルギーを求める。そして、レーリーの方法(振動系の一次固有振動数を求める近似解法)により固有円振動数を求める。なお、撓み曲線は三角関数の場合と、静撓み曲線の場合を仮定した。

[位置エネルギー]

$$\left. \begin{aligned} \text{曲げによる} \quad P_f &= \frac{1}{2} EI \int_0^L \left( \frac{d^2 y_f}{dx^2} \right)^2 dx \\ \text{せん断による} \quad P_s &= \frac{1}{2} \gamma \int_0^L \left( \frac{dy_s}{dx} \right)^2 dx \\ \text{重力による} \quad P_g &= -\frac{1}{2} \int_0^L \left\{ W \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + q \int_0^x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \right\} dx \end{aligned} \right\} (1)$$

$L$ :円筒殻の全長  $W$ :上部蓋の重量  $E$ :ヤング係数

$y_f, y_s, y$ :梁の曲げに基づく静撓み,せん断に基づく静撓みと全撓み

表1 試験体の形状

胴部厚 [cm]	0.02
半径 [cm]	6.65
全長 [cm]	38.0
ポアソン比	0.33
ヤング率[N/cm <sup>2</sup> ]	6285474.25 (実測値)

今、考えている倒立振子において、 $P_g$  は系の攪乱要素として、重力に基づく質量の下降量から求められる項で、重力の作用は変形を助長しようとする性質を持つ。

$x$  はサイロ下端を原点として、サイロにそって上部に向かって測った任意点までの距離とする。

[運動エネルギー]

円筒胴部並進慣性による

$$K_f p^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{g} \int_0^L q (y_f + y_s)^2 dx$$

円筒胴部回転慣性による

$$K_\rho p^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{g} \int_0^L \rho_1^2 q \left( \frac{dy_f}{dx} \right)^2 dx$$

蓋の並進慣性による

$$K_v p^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{g} W (y_f + y_s)^2_{x=L}$$

蓋の回転慣性による

$$K_R p^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{g} W \rho_2^2 y_f'^2_{x=L}$$

$q$ : 円筒殻単位長さ重量       $\rho_1$ : 筒の断面の回転半径  
 $\rho_2$ : 蓋の回転半径 (慣性半径)       $p$ : 円振動数

以上から、

$$\left. \begin{aligned} P_{fsg} &= P_f + P_s + P_g \\ K_{fpVR} \cdot p^2 &= K_f p^2 + K_\rho p^2 + K_v p^2 + K_R p^2 \\ p^2 &= P_{fsg} / K_{fpVR} \quad (\text{rad/sec})^2 \end{aligned} \right\} (3)$$

撓み式は等分布荷重及び集中荷重に対する静力学的な曲げとせん断撓みの式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{q}{2EI} \left( \frac{L^2 x^2}{2} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) \\ y_2 &= \frac{W}{EI} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \\ y_s &= \frac{1}{2\gamma} (qx^2 + 2Wx) \\ y_f &= y_1 + y_2 \quad \gamma = k' GA \quad y = y_s + y_f \end{aligned} \right\} (4)$$

$1/k'$ : せん断変形の係数     $G$ : せん断弾性係数     $A$ : 筒の断面積

#### 4. 有効換算質量の算定

サイロが振動する際に、殻体とともに横揺れ振動する粉体の量は、その全てではなく、その質量を

有効質量とするならば、これまでの解析及び実験による研究結果<sup>2)</sup>から、サイロ内の粉体の質量の7割～8割と算定され、本論ではこの考え方を適用し、0.8を採用している。

さらに、分布質量系と質点系の固有振動数が一致するように質点系の質量を換算した。座屈前のサイロ容器の形態は、柱脚固定の片持ちはりと考えられるが、一度座屈を生じた後は、柱脚が回転ばねを持つ系になると考えられる。

本論では、座屈前は質量のおよそ1/4 ( $\beta = 0.25$ )、座屈後はおよそ1/3 ( $\beta = 0.33$ )程度として解析を行った。

##### (4-1) 座屈前の換算質量

弾性範囲について解析手法から、曲げ、せん断、重力による位置エネルギー及び、円筒胴部並進慣性、回転慣性、蓋の並進慣性、回転慣性を含めた運動エネルギーを用いて、(3)式より1次の固有振動数を求めた結果、解析からは16.08[Hz]、一方実験より求めた振動数は約16.49[Hz]であった。

また、先端質量 $w_2$ は厚さ8.30[cm]に及ぶが、重心を考えて1自由度系とした。

したがって、1自由度に換算する時の $\beta$ は  $p = \sqrt{k/m}$  の関係式から次式で決定することができる。

$$\beta = \frac{k_s g - p^2 W_2}{p^2 (W_1 + 0.8 W_3)} \quad (5)$$

$k_s$ : 静バネ係数 (3922.40[N/cm])

本論に用いた試験体先端質量 $w_2$ は、軸力比0.1を与えているために、上部錘の322.5[N]と上部リブの23.53[N]で、 $w_1$ (0.98[N])と $w_3$ (83.36[N])に比較して圧倒的に大きい。より正確に求めるために、 $w_2$ が23.53[N]から本論の試験体の約1/5の場合について $\beta$ を求めると $\beta = 0.236 \sim 0.297$ となるので $\beta$ を約1/4 ( $\beta = 0.25$ )とした。

##### (4-2) 座屈後の換算質量

半径 $a$ の円板の微小重量の質量 $\Delta m'$ は次式となる。(図1参照)

$$\Delta m' = (k) r d\phi \cdot dr \quad (k: \text{面密度}) \quad (6)$$

$\Delta m'$ に対する紙面に直角な軸 $z'$ に関する慣性モーメント $\Delta J$ は次式となる。

$$\Delta J = r^2 \Delta m' = r^2 \cdot (k) r \cdot d\phi \cdot dr = kr^3 d\phi dr \quad (7)$$

円板全体としての慣性モーメント $J_z$ は次式となる。

$$\left. \begin{aligned}
 J_{z'} &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 \cdot d\phi \cdot dr = \frac{ka^4\pi}{2} \\
 (m' &= k\pi a^2 \text{ より}) \\
 \therefore J_{z'} &= m' \cdot \frac{a^2}{2} \\
 J_{z'} &= J_{x'} + J_{y'} = 2J_{x'} = 2J_{y'} \\
 J_{x'} &= J_{y'} = \frac{1}{2} J_{z'} = \frac{a^2}{4} m'
 \end{aligned} \right\} (8)$$

厚さ  $dz$  の円板の質量は、

$$m = m' \cdot dz = k\pi a^2 \cdot dz \quad (9)$$

$x'$  軸に関する慣性モーメントは、

$$\Delta J_{x'} = m \cdot z^2 + \frac{ma^2}{4} \quad (10)$$

$x'-x'$  軸に関する全体の慣性モーメントは、

$$\begin{aligned}
 J_{x'} &= \int \Delta J_{x'} = \int \left( mz^2 + \frac{ma^2}{4} \right) = \int k\pi a^2 z^2 dz + \int k\pi a^2 \cdot \frac{a^2}{4} dz \\
 &= \int_{-l/2}^{l/2} k\pi a^2 z^2 dz + \int_{-l/2}^{l/2} \frac{k\pi a^4}{4} dz = k\pi a^2 l \left( \frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{4} \right) \\
 &= M \left( \frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{4} \right) \quad (M = k\pi a^2 l) \quad \dots (11)
 \end{aligned}$$

一方、座屈後の  $X-X$  軸に関する慣性モーメント  $I_X$  は、

$$I_X = \left( \frac{l}{2} \right)^2 \cdot M + J_{x'} = M \left( \frac{l^2}{4} \right) + M \left( \frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{4} \right) = M \left( \frac{l^2}{3} + \frac{a^2}{4} \right) \quad \dots (12)$$

$k_\theta$  は倒立した円筒モデルの回転ばねとすると、復元力モーメントは  $k_\theta \theta$  となる。

図 2-(a) が座屈後の  $X-X$  軸に関する自由体図であり、これに対する運動方程式は次式となる。

$$-I_X \ddot{\theta} - k_\theta \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (\omega^2 = \frac{k_\theta}{I_X}) \quad (13)$$

図 2-(b) は図 2-(a) を 1 自由度系にした時の自由体図であり、運動方程式は次式となる。

$$-I_X \ddot{\theta} - k_\theta \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (\omega^2 = \frac{k_\theta}{I_X}) \quad (14)$$

$$I_{X'} = l^2 m_{eq} \quad (m_{eq} \text{ は等価又は換算質量}) \quad (15)$$

(12)式より、(13)式の  $\omega$  と(14)式の  $\omega'$  が等しいと仮定すると、

$$\omega = \omega' = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_X}} = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_{X'}}} \quad (16)$$

2つのモデルで  $k_\theta$  は同等と考えると、

$$\left. \begin{aligned}
 M \left( \frac{l^2}{3} + \frac{a^2}{4} \right) &= l^2 m_{eq} \\
 m_{eq} &= M \left( \frac{1}{3} + \frac{a^2}{4l^2} \right) \doteq \frac{M}{3}
 \end{aligned} \right\} (17)$$

(4-1)、(4-2)より、動的解析に用いる質量  $m$  の  $\beta$  を座屈前は  $1/4$ 、座屈後は  $1/3$  として次式を用いる。

$$m = \frac{1}{g} \{ W_2 + \beta(W_1 + 0.8W_3) \} \quad (18)$$

$W_1$  : 内容物を除いたアルミ製薄肉円筒容器の重量 (0.98[N])

$W_2$  : 上部リップおよび錘の重量 (346.03[N])

$W_3$  : 粉体の重量 (83.36[N])  $g$  : 重力加速度 (980[cm/s<sup>2</sup>])

### 5.ベキ関数型履歴系解析手法<sup>5)</sup>

サイロを 1 自由度とみなし、強制外力 (加速度  $\ddot{y}$ ) が作用する場合の運動方程式を次式で表す。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + f(x, \omega) = -m\ddot{y} \quad (19)$$

$c$  は粘性減衰係数、 $f(x, \omega)$ 、 $x$  はそれぞれサイロの履歴曲線の示す非線形の復元力、水平変位を表し、 $\omega$  は系の運動中における復元力の円振動数を表す。

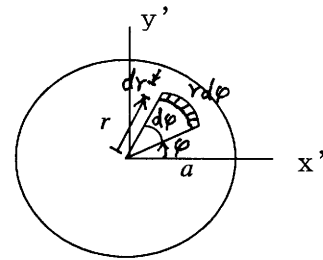


図 1 半径  $a$  の円板

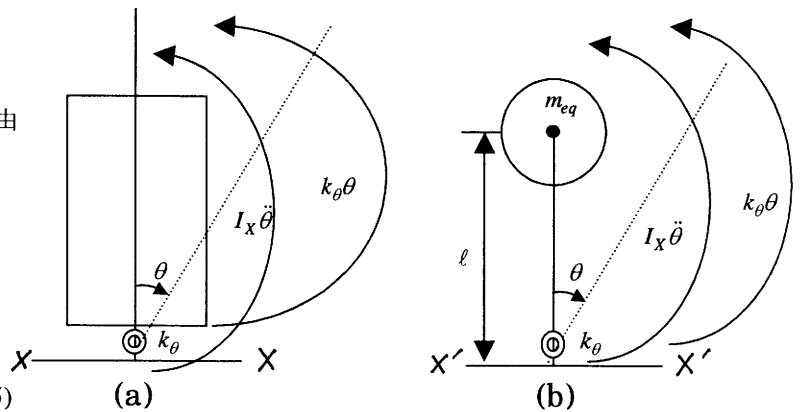


図 2 自由体図

線形限界時の水平変位  $x_s$ 、復元力  $f_s$  を導入し (19) 式を無次元化すると次式となる。

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} + 2h \frac{dX}{d\tau} + F(X, \eta) = -\frac{d^2Y}{d\tau^2} \quad (20)$$

$$\left[ \omega_s^2 = f_s / mx_s, \tau = \omega_s t, X = x / x_s, Y = y / y_s, h = c / 2m\omega_s, \eta = \omega / \omega_s \right]$$

ここで、 $\omega_s$  は線形領域における固有円振動数、減衰定数  $h$  は臨界粘性減衰係数  $c_c = 2m\omega_s$  に対する粘性減衰係数  $c$  の比  $c/c_c$  を表す。(振動応答解析には、実験より得られた減衰定数  $h=0.014$  を用いている。)

上記(20)式の運動方程式から、べき関数型履歴系解析手法を用いて応答計算を行い、実験値と比較することにより、換算質量の検証を行う。

## 6. 解析結果

換算質量の有効性、妥当性を検証するため、無傷の試験体を振動台上に固定し、正弦波入力加速度 6.0[Hz] (最大 11.125 [ $m/s^2$ ]) を用い、振動台上実験を行った。絶対応答加速度と相対応答変位の解析値と実験値の比較 (図3, 図4) 及び、応答計算から得られた履歴復元力曲線 (図5) を示す。

解析値と実験値の比較から座屈前後において、絶対応答加速度 (図3) 及び相対応答変位 (図4) ともに、良い対応を示すことが分かった。

## 7. 結論

先端重量  $w_2$  の上部錘 322.5[N] と上部リブの 23.53[N] を合わせた重量は、軸力比 0.1 を与えるためであり、アルミ製薄肉円筒容器  $w_1$  (0.98[N]) と粉体  $w_3$  (83.36[N]) に対して圧倒的に大きい。

そこで、サイロ容器の弾性域での換算質量を正しく評価するためには、本論の試験体の上部錘及び上部リブの重量  $w_2$  の約 1/5 の場合で得られた  $\beta$  及び、 $w_2 = 23.53$ [N] で得られた  $\beta$  は、 $\beta = 0.23 \sim 0.26$  であり、応答の解析値と実験値の比較からもサイロ容器の換算質量は、約 1/4 で評価することが適切であると考えられる。

しかし、座屈後の慣性質量については、サイロ容器の形状によっては、 $R/L$  (半径/全長) 等の割合により、せん断、曲げ変形を考慮しなければならないため、その都度  $\beta$  の値を確認する必要がある。座屈後の  $\beta$  は約 1/3、 $R/L$  等の値によっては、 $\beta = 1/3 + (R/L)^2 / 4$  を用いる必要がある。

一方、応答解析の更なる精度の向上には、図5における履歴復元力曲線の不連続点を改良する

必要がある。また、軸力比 0.0、0.2 の履歴復元力特性の傾向の把握が残されている。

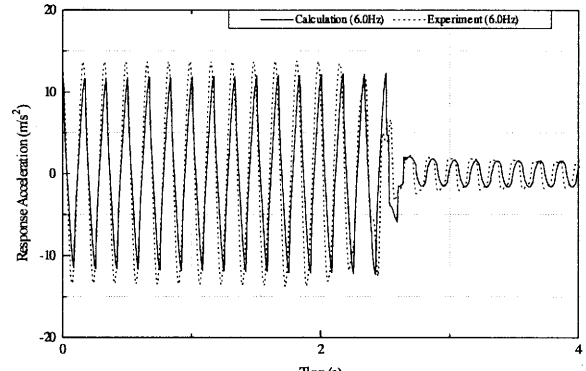


図3 絶対応答加速度波形 6.0[Hz]

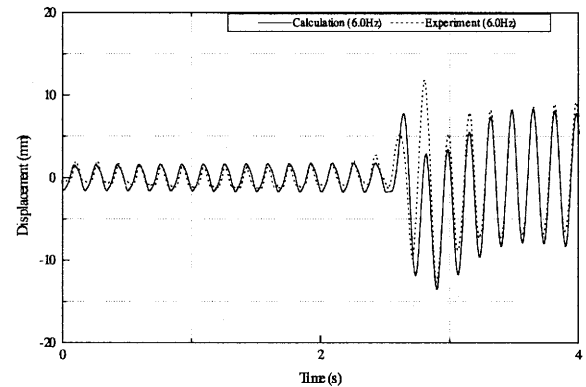


図4 相対応答変位波形 6.0[Hz]

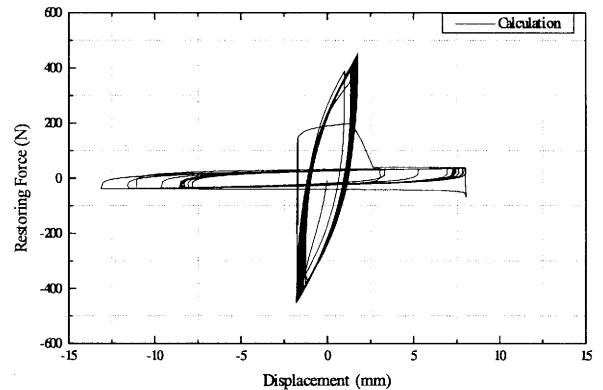


図5 履歴復元力曲線 6.0[Hz]

## 参考文献

- 1) 日本建築学会; 容器構造設計指針案・同解説, 丸善, 1996.10
- 2) 柴田, 門「円筒型サイロの振動特性に関する研究」日本建築学会論文報告集, 第293号, 1980.7
- 3) 柴田耕一, 門万寿男, 村松弘道, 佐々木昌克「鋼製サイロの振動特性に関する研究 (各種粉粒体の有効の有効質量と実大振動実験について)」日本建築学会論文報告集第315号, 1982.5
- 4) ジャコブセン, エーア 共著, 後藤尚男, 金多潔 共訳「機械と構造物のための振動工学」, 丸善株式会社
- 5) 渡邊, 柴田「サイロ容器の履歴復元力特性を考慮した非線形振動応答解析手法に関する研究」, 一変位振幅及び周波数に依存する復元力特性を持つサイロの振動解析と振動実験 - 日本建築学会構造系論文報告集第575号, 2004.1
- 6) Kouichi SHIBATA 以下 13 名, DESIGN RECOMMENDATION FOR STORAGE TANKS AND THEIR SUPPORTS - Earthquake Resistant Design of Storage Tanks and Their Supports -, ARCHITECTURAL INSTITUTE OF JAPAN, p.0 ~ p.158, 2004.3