

複雑形状まわり流れ現象の数値シミュレーション

角田 和彦 (数理情報工学科)

1. はじめに

3次元性を有する非圧縮粘性流体の問題には、複雑な流れの現象が潜んでおり、その流れの本質を理解することは重要な研究課題である。

前年度の報告においては、3次元の非圧縮粘性流れ問題に対し、高い Reynolds 数域の数値シミュレーションを行う際に、上流化法に基づく解析スキームなどを用い、数値解の安定化を図る必要があることを示してきた。その上流化解析手法の一つとして、指数関数を重み関数とした Petrov-Galerkin 法に基づく有限要素スキーム^{1),2)}を開発し、その定式化を展開してきた。この解析スキームは、指数関数の重み関数の中に上流化の効果が含まれていることに特徴がある。そのスキームを用いた数値計算例として、比較的単純な形状まわり流れ現象を対象とし、得られた数値結果を実験値などと比較し手法の妥当性を検証し、複雑な流れ現象の解明を図ってきた。

本研究では、前報で展開してきた指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素スキーム¹⁾をより現実的な流れ問題に適用することを目的としている。最初の数値計算例として、立方体周り流れの問題を取り上げる。この流れ現象では、立方体周りに馬蹄渦やアーチ渦といった3次元特有の渦構造が出現することが知られている^{3),4)}。前報では馬蹄渦の存在を数値的に明示したが、アーチ渦の検討までには至らなかった。本報では、アーチ渦の存在確認、及び2種類の有限要素モデルから得られた数値結果を実験値などと比較し、提案手法の拡充を図る。次に、より現実的な流れの問題として、プロペラ形状周り流れ、及び車室内空調流れの問題^{5),6)}をシミュレートし、複雑な形状を有する流れの現象に関しても適用可能であることを示す。

2. 基礎微分方程式

3次元非圧縮粘性流れ場の解析対象領域を Ω 、その境界を Γ とする。また、 \mathfrak{S} は閉じた時間間隔を表す。その流れの現象を支配する Navier-Stokes 方程式及び連続の方程式に関し、fractional step 分解を導入すれば以下の方程式系を得る。

$$\dot{u}_i(\bar{u}_i, u_i^n) + u_j u_{i,j} = \frac{1}{Re} u_{i,jj} \quad \text{in } \mathfrak{S} \times \Omega \quad (1)$$

$$\dot{u}_i(u_i^{n+1}, \bar{u}_i) = -p_{,i}, \quad u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{S} \times \Omega \quad (2)$$

ただし、 $\dot{u}_i(u_i^{n+1}, u_i^n) = \dot{u}_i(u_i^{n+1}, \bar{u}_i) + \dot{u}_i(\bar{u}_i, u_i^n)$ 、 u_i は速度ベクトル成分、 p は圧力、 Re は Reynolds 数、 \bar{u}_i は修正速度ベクトル成分、 n は時間ステップ数を表す。

3. 指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素解析

高い Reynolds 数域の流れの現象を Galerkin 型の有限要素法で解析すると要素分割数を多くしない限り、擬似的な振動を伴う数値解が得られることは知られてい

る。そこで、高 Reynolds 数流れの解析に対しても安定した数値解を得るために、式 (1) に指数関数を重み関数とした Petrov-Galerkin 法に基づく有限要素スキーム¹⁾を適用する。

式 (1) の重みつき積分表現に発散定理を適用し、幾らかの操作を施せば次の弱形式表現を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \{ \dot{u}_i + u_j u_{i,j} \} M_\alpha d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{1}{Re} u_{i,j} N_{\alpha,j} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_e} \frac{1}{Re} u_{i,j} n_j N_\alpha d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 Ω_e は全体領域 Ω の部分領域、 Γ_e はその境界、 n_j は外向き単位法線ベクトル成分を表す。また、 M_α は指数関数型の重み関数で次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_\alpha(x) &= \sum_{\gamma,i} N_\alpha(x) e^{-\alpha_i(N_\gamma x_i^\gamma - x_i^\alpha)} \\ \alpha_i &= \frac{\alpha_i}{|L_i|} \text{sgn}(v_i) \quad (i = 1 \sim 3) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ただし、 v_i 及び L_i は Ω_e 内で平均化された速度ベクトル及び代表長さそれぞれを表し、 $\text{sgn}(\cdot)$ は符号関数である。また、 α_i は安定化パラメータを表している。

ここで、未知関数の要素内補間を行い、時間進行スキームとして2次精度の Adams-Bashforth 法を用いると次の有限要素方程式が得られる。

$$M_{\alpha\beta} \frac{\{\bar{u}_i\}_\beta - \{u_i^n\}_\beta}{\Delta t} = \frac{1}{2} (3F_{i\alpha}^n - F_{i\alpha}^{n-1}) \quad (5)$$

ただし、右辺の諸量は

$$F_{i\alpha}^n = -\{K_{\alpha\beta}(u_i^n)\} + \frac{1}{Re} D_{\alpha\beta} \{u_i^n\}_\beta + f_{i\alpha}^n \quad (6)$$

で表され、各行列及びベクトルは文献1)で定義されている。

4. 数値計算例

前節で展開してきた指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素スキームを用い、立方体周り流れ、プロペラ形状周り流れ、及び車室内空調流れの3種類の数値計算例を通して解析手法の妥当性及び適用性を検討する。

なお、計算を実行するに当たり、初期条件は領域内の全ての点で速度を零とし、速度ベクトル及び修正速度ポテンシャルは一次要素、圧力には要素内一定の要素を用いた。

4.1 立方体周りの流れ^{3),4)}

立方体周り流れの問題に対し、Reynolds 数 $Re = 10^3, 10^5$ に関する計算例を示す。Fig.1(a) に計算領域及び境界条件を示す。計算に用いた有限要素メッシュ (case 1) は Fig.1(b) に示される。また、2種類の有限要素モデルに関するパラメータを Table 1 に示す。

Fig.2 は、立方体前方、及び上面から見た流線を示す。低い Reynolds 数域では、立方体前方に対称的な螺旋状の馬蹄渦が形成されることが確認されている³⁾。一方、高い Reynolds 数域での結果は、非対称的な螺旋状の馬蹄渦が形成され、立方体後流域には複雑な渦の挙動が現れている。その流れ場に対応している圧力場は Fig.3 に示される。 $Re = 10^3$ の圧力場の結果からアーチ渦の構造が観察される。また、2つのモデルに対し、 $x_3 = 0.5D$ での立方体前面、側面、及び背面の圧力係数 C_p の結果をそれぞれ Fig.4(a)-(d) に示し、実験値³⁾との比較も行っている。前面及び背面の結果は実験値との一致が見られるが、側面の分布については異なり検討する必要がある。

Table 1 A summary of the parameters

Case	Nodes	Elements	l_{min}	Δt	α_i
1	100,446	94,000	0.05	0.005	0.2
2	320,256	304,000	0.0044	0.002	0.2

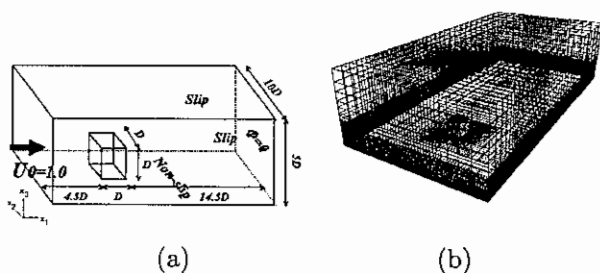


Figure 1: Flow around a wall-mounted cube

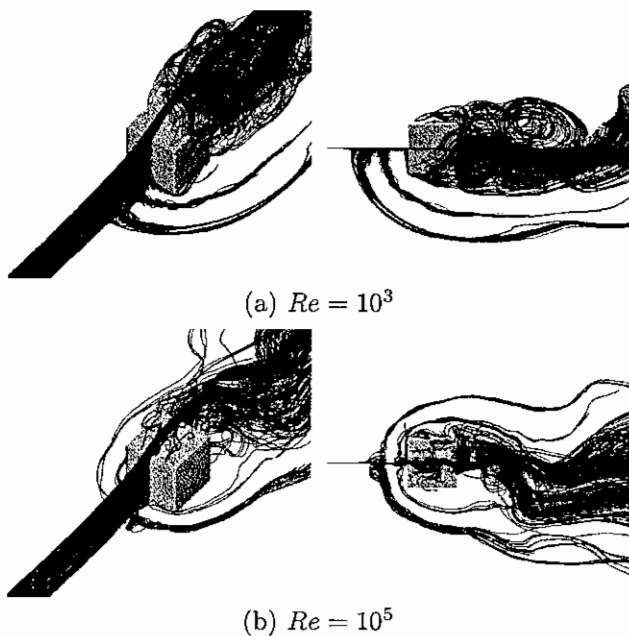


Figure 2: Instantaneous streamlines

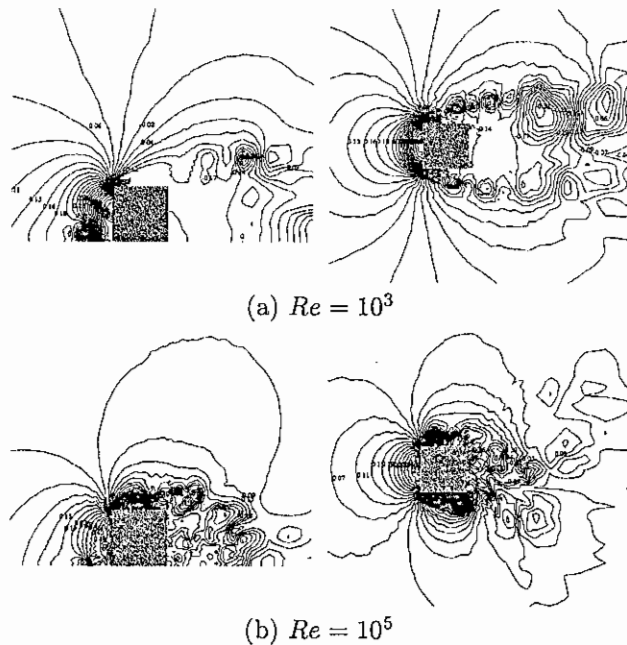


Figure 3: Instantaneous pressure fields

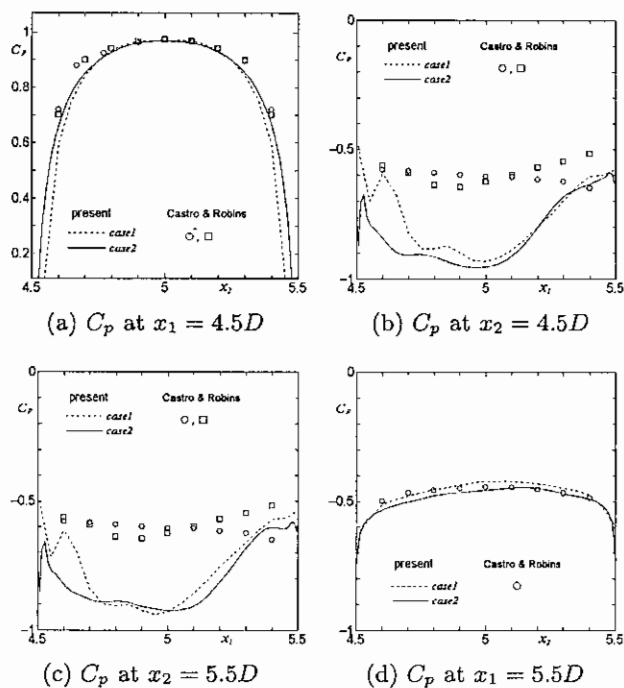


Figure 4: Pressure coefficients on the cube

4.2 プロペラ形状周りの流れ⁵⁾

プロペラ形状周り流れの問題に対し、 $Re = 10^3, 10^5$ に関する計算例を示す。Fig.5(a) に計算領域及び境界条件を示す。計算に用いた有限要素メッシュを Fig.5(b) に示し、そのパラメータを Table 2 に示す。

Fig.6は側面から見たプロペラ後流域での流線を示す。各レイノルズ数に関して、上部はプロペラが静止している場合であり、一方、下部はプロペラ上に回転速度条件を与えた場合である。いずれの場合でもプロペラの後流域に螺旋状の3次元渦構造が現れ、特に、回転速度条件を与えた場合の方がより明確になっている。それらの流れ場に対応する速度ベクトル場を上流側から見たものを Fig.7 に示す。4枚の羽に沿った流れが観察され、後流域には対称的なキャビティ領域が存在している。

Table 2 A summary of the parameters

Nodes	Elements	Δt	α_i
83,519	80,440	0.002	0.2

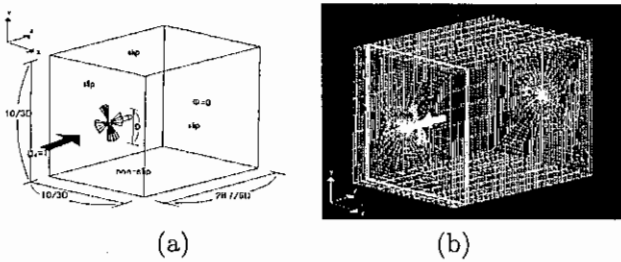


Figure 5: Flow around a propeller

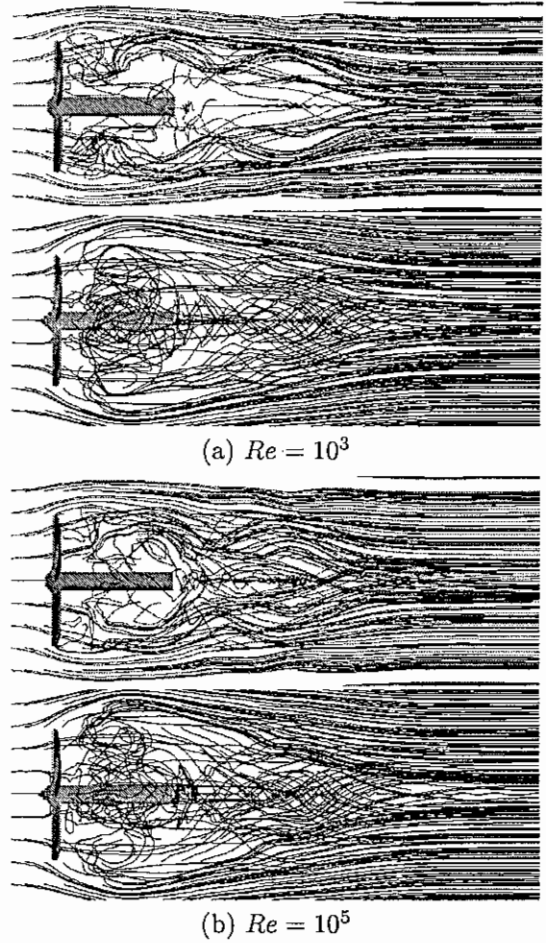


Figure 6: Instantaneous streamlines

4.3 車室内空調の流れ⁶⁾

車室内空調流れの問題に対し、 $Re = 10^3, 10^5$ に関する計算例を示す。Fig.8(a) に計算領域及び境界条件を示す。計算に用いた有限要素メッシュを Fig.8(b) に示し、そのパラメータを Table 3 に示す。

Fig.9は車室の側面及び上面から見た流線を示す。時間の経過とともに前座席に対称的な縦渦が生成され、その渦の一部は後部座席に移動していることが分かる。また、レイノルズ数が高いほうが前座席領域の流れの挙動はより複雑になっている。

Table 3 A summary of the parameters

Nodes	Elements	Δt	α_i
73,584	65,367	0.002	0.5

5. おわりに

種々の非圧縮性粘性流れの現象に対し、指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法による解析を展開してきた。その際、移流項及び拡散項に対し2次精度の Adams-Bashforth 法を適用し、時間進行に関する高精度化を図り、圧力に関するポアソン方程式の解法には SCG 法を採用した。

計算結果として、最初、立方体周りの流れに対し、高い Reynolds 数域までの流れの挙動及び圧力係数の結果

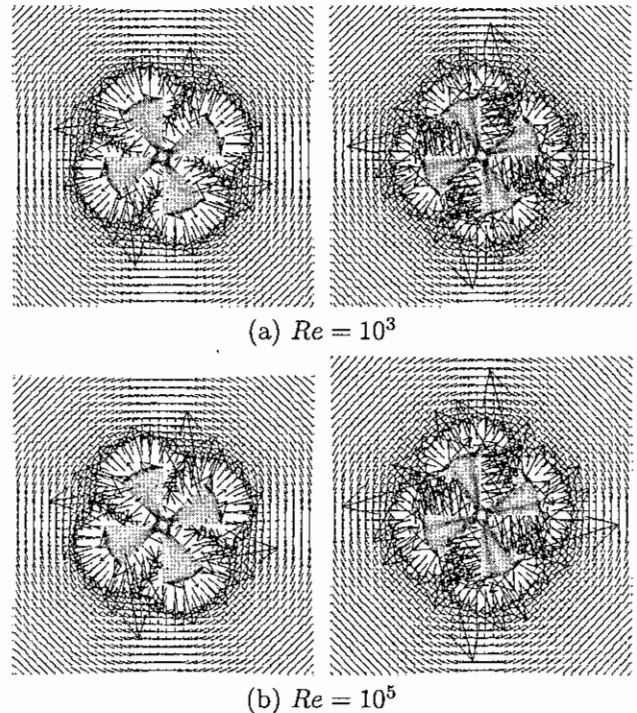


Figure 7: Instantaneous velocity vectors

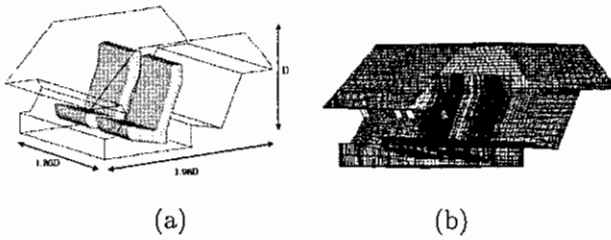


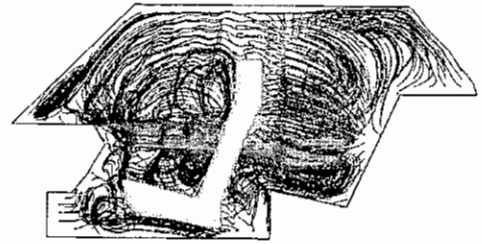
Figure 8: Airflow in a car

を示してきた。立方体前方に非対称的な螺旋状の馬蹄渦、及び立方体の後流域にアーチ渦の存在が確認できた。また、圧力係数に関しては、要素数の異なる2種類のモデルともに立方体側面の結果を除き、実験値との良好な一致を得た。次に、より現実的な流れの問題として、プロペラ形状周り、及び車室内空調の高 Reynolds 数域までの流れの挙動をシミュレートし、複雑な形状を有する流れの現象に関しても適用可能であることを示してきた。今後、これらの問題に関しても定量的な検討をするつもりである。

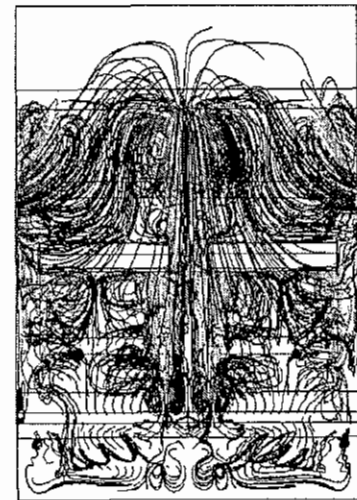
なお、本研究をまとめるのに当たり、佐藤洋平君(本学部大学院生)と五月女賢二君(アイ・エス・ビー)に協力を得た。ここに記して謝意を表す。

参考文献

1. K. Kakuda and N. Tosaka, "Finite Element Approach for High Reynolds Number Flows", *Theoretical and Applied Mechanics*, 41, (1992) pp.223-232
2. Kakuda, K., Tosaka, N. and Nakamura, T., "Finite Element Analysis for 3-D High Reynolds Number Flows", *Comp. Fluid Dyn.*, 7 (1996), 163-178
3. Castro, I.P. and Robins, A.G., "The Flow around a Surface-Mounted Cube in Uniform and Turbulent Streams", *J. Fluid Mech.* 79, part 2 (1977), 307-335
4. 岡本史紀, 他4名, 平面壁上の正方形柱の近傍後流, 日本機械学会論文集 (B 編), 61 - 589, B(1995), 3105-3113
5. 日本機械学会編, 写真集流れ, 丸善, (1984)
6. 栗山利彦, 自動車設計における CFD, 機械の研究, 第45巻第1号, (1993), pp.132-136



(a) $Re = 10^3$



(b) $Re = 10^5$

Figure 9: Instantaneous streamlines