

## プロジェクト3

# 流れ問題の数値計算スキームの構築 -格子ボルツマン法による粘性流れ解析-

登坂 宣好 (数理情報工学科)

### 1 はじめに

流れ問題の数値計算スキームの構築という研究課題に対し、平成14年度では次の3点について以下のような成果を得た。

#### ①境界型解法による流れ解析

流体の非線形問題として与えられる非圧縮性粘性流れ問題に対する境界要素法による数値計算スキームの提案、及び完全流体の移動境界問題に対する境界型解法の提案を行った。

#### ②格子ボルツマン法による粘性流れ解析

最近注目されている流れ問題の離散的解析法として知られている格子ガス・オートマトン法の中でも、最も有効な格子ボルツマン法の非圧縮性粘性流れ問題への適用性を検討した。

#### ③流体と構造体との動的相互作用解析

流れ場に存在する構造体の複雑な動的挙動を解明するためには、流れと構造体とが成す連成系の精密な動的解析が必要となる。そこで、流れ場を完全流体場とし、構造物を浮遊式の弾性体とした場合の連成系に対する動的解析において各々の物体に対し、境界要素法と有限要素法とで離散化する定式化を与え、数値計算による解析を進めてきた。

本論では、上記3つの成果の中から2番目の成果である格子ボルツマン法による粘性流れ解析を詳述することにする。

## 2 格子ボルツマン法

複雑な流れ現象をコンピュータによって解明しようとする“数値流体力学”に関する研究が近年活発に行われている。これまで主に提案されてきた手法は、解析対象の流体を連続体として考える“連続体モデル”であり、“差分法”、“有限要素法”及び“境界要素法”などが挙げられる。いずれの手法も、流れ場の支配方程式であるナビエ・ストークス方程式を直接離散化する数値計算スキームであるが、移流項に非線形性があり、計算を困難にさせる大きな要因と

なっている。そのために、差分法や有限要素法に対しては“風上化”，境界要素法に対しては“一般化境界要素法”などの手法<sup>[1]</sup>が提案されている。

これに対して、解析対象の流体を多数の粒子の集合体であると考える“離散体モデル”に関する研究が近年活発に行われている。この方法論は、“セル・オートマトン法”に端を発し、“格子ガス・オートマトン法”及び“格子ボルツマン法”へ発展を遂げている。いずれの手法も、ナビエ・ストークス方程式を直接離散化せず、仮想的な粒子の衝突と並進とを粒子分布関数を用いて逐次計算し、その粒子分布関数のモーメントから巨視的な流体の密度や流速を求める数値計算スキームである。特に、格子ボルツマン法は、実数値の分布関数を用いることで、セル・オートマトン法や格子ガス・オートマトン法に比べて格子点数を大幅に削減でき、計算時間の短縮を図ることができる。

そこで本論では、非圧縮性粘性流れ問題に対して格子ボルツマン法を用いた定式化を行い、正方キャビティ流れ問題及び三角キャビティ流れ問題に適用して、本手法の有効性を検討する。また、正方キャビティ流れ問題に対しては、Multi-Particle Collisionモデル及び格子BGKモデルの2種類の衝突パターンを採用して、両者の比較検討を行う。

## 3 粘性流れ問題への適用<sup>[2], [3], [4], [5]</sup>

格子ボルツマン法における基礎方程式は、次のように与えられる。

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i \tau, t + \tau) = f_i(\mathbf{r}, t) + \Omega_i[f_i(\mathbf{r}, t)] \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{c}_i$ は*i*方向へ移動する運動粒子の速度ベクトル、 $f_i(\mathbf{r}, t)$ は格子点の空間位置 $\mathbf{r}$ 、時刻*t*、速度ベクトル $\mathbf{c}_i \tau$ を持つ粒子の存在する確率を表す分布関数であり、式(1)における変数は、ブール変数ではなく実数値である。また、 $\tau$ は時間間隔である。右辺第1項は、衝突後に粒子が $\mathbf{c}_i \tau$ 進んだ格子点に移動するという並進演算を表している。また、右辺第2項の

$\Omega_i[f_i(\mathbf{r}, t)]$  は衝突演算子と呼ばれている。[ ] 内の分布関数の集合  $f(\mathbf{r}, t) = \{f_i(\mathbf{r}, t)\}$  は、この衝突演算子が全ての粒子を含む相互作用の総和であることを意味している。

衝突演算子は、これまでの発展の中で様々なタイプが提案されているが、大別すると以下の3つになる。

### 1) Multi-Particle Collision (MPC) モデル

McNamara らによって提案されたモデルで、粒子の衝突する確率(衝突によって運動状態が変化する粒子数の割合)は、衝突しようとする粒子の数密度の積に比例するという考え方で、局所平衡分布関数は次のように与えられる。

$$f_i^{(0)} = \frac{\rho}{12} \left[ 1 + 4c_{i\alpha}u_\alpha + 12(4c_{i\alpha}c_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta})u_\alpha u_\beta \right] \quad (2)$$

ここで、 $\alpha, \beta$  はデカルト座標を表す指標、 $\delta_{\alpha\beta}$  はクロネッカーのデルタ記号である。

### 2) 衝突散乱行列モデル

Higuera らによって提案されたモデルで、粒子分布が平衡状態に近いという考え方で、局所平衡分布関数は次のように与えられる。

$$f_i^{(0)} = d \left[ \begin{aligned} &1 + 2c_{i\alpha}u_\alpha \\ &+ G(d) \left( c_{i\alpha}c_{i\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} \right) u_\alpha u_\beta + \frac{\Delta\rho}{7d} \end{aligned} \right] \quad (3)$$

$$G(d) = \frac{2(1-2d)}{1-d} \quad (4)$$

ここで、 $\Delta\rho$  は静止流体における静止粒子の数密度、 $d$  は1方向あたりの運動粒子の平均粒子数密度である。

### 3) 格子 BGK モデル

Qian らによって提案されたモデルで、粒子分布が衝突によって平衡状態に向かって緩和するという考え方で、局所平衡分布関数は次のように与えられる。

$$f_0^{(0)} = \alpha\rho - \rho u^2 \quad (5)$$

$$f_i^{(0)} = \frac{\rho - \alpha\rho}{6} + \frac{\rho}{3} \left[ (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}) + 2(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{1}{2}u^2 \right] \quad (i=1,2,\dots,6) \quad (6)$$

ここで、 $\alpha$  は任意のパラメータであり、 $u = |\mathbf{u}|$  は流速ベクトルの大きさである。

また、本論では衝突によって格子点上に存在する全ての粒子の質量と運動量が保存される衝突演算モデルを採用する。このモデルでは1辺が単位長さの正六角形格子を用いて平面を離散化する。速度についても離散化し、各運動粒子は  $60^\circ$  間隔で延びる格子線に沿って、1タイムステップの間に隣接する格子点へ移動する。その後、互いに衝突して一部の粒子は移動方向が変わる。また、粒子は全てのタイムステップにおいて格子点上に存在しているものとして、格子線上に止まることはない。本モデルは、衝突演算子  $\Omega_i$  に関して質量保存と運動量保存を以下のように考慮する。

$$\sum_i \Omega_i = 0 \quad (7)$$

$$\sum_i \Omega_i \mathbf{c}_i = 0 \quad (8)$$

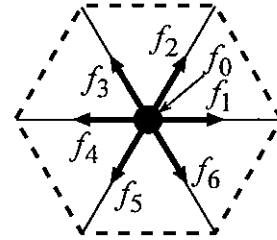


図1 速度分布関数

図1に示すように、各格子点において6方向に進む各運動粒子と、格子点上に静止する静止粒子が存在し、それらの存在は速度分布関数  $f_i (i=0,1,2,\dots,6)$  によって表す。各格子点における流体の密度  $\rho$  及び単位体積あたりの運動量は次式で与えられる。

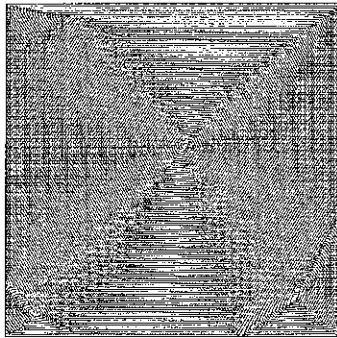
$$\rho = \sum_i f_i \quad (9)$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_i f_i \mathbf{c}_i \quad (10)$$

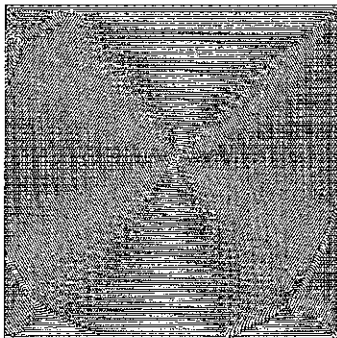
ここで、 $\mathbf{c}_i$  は  $i$  方向へ移動する運動粒子の速度ベクトル、 $\mathbf{u}$  は格子点における流速ベクトルである。

### 3.1 正方キャビティ流れ問題<sup>[2],[3]</sup>

本論では非圧縮性粘性流れ問題を取り扱うので、開発された数値計算手法に対するベンチマークテストとして広く知られている正方キャビティ流れ問題を取り上げることにする。この問題は正方キャビティの上面に  $x$  方向の流速を与え、他の全ての壁面で流速成分を0とした場合の流れ解析を行うものである。図2に格子BGKモデルによって得られた流速ベクトルを、図3に中心線上の流速分布をMPCモデルの解及びGhiaらの差分解<sup>[6]</sup>との比較と合わせて示す。

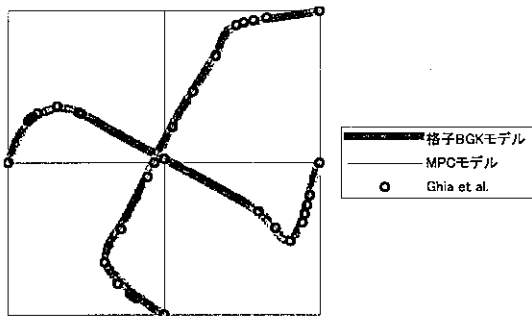


(a) Re=1000

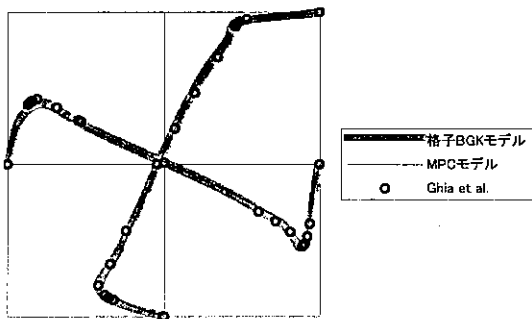


(b) Re=3200

図2 流速ベクトル図



(a) Re=1000

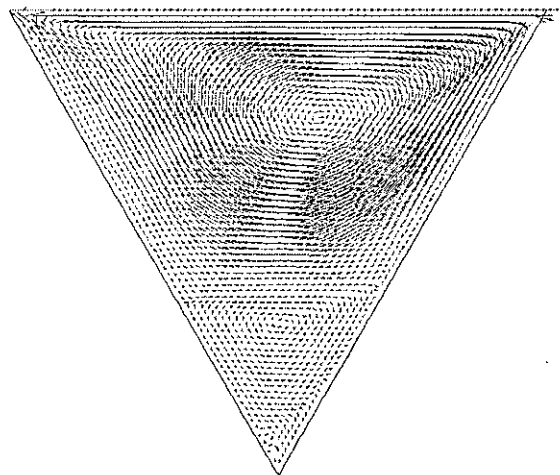


(b) Re=3200

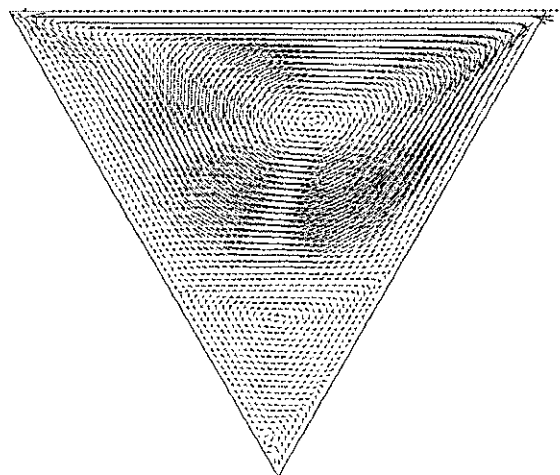
図3 中心線上流速分布図

### 3.2 三角キャビティ流れ問題<sup>[2],[4],[5]</sup>

三角キャビティ流れ問題は、矩形管内流れの曲がり角や物体表面の引っ掻き溝の内部など、非常に身近な流れ現象であると同時に、工学的にも重要な問題である。この問題は、三角キャビティの上面に  $x$  方向の流速を与え、他の全ての壁面で流速値を 0 とした場合の流れを解析するものであり、三角形という単純な幾何学形状を有しながら、差分法などで用いられる直交格子の生成が困難なために、あまり取り扱われていないのが現状である。ここでは、衝突演算子に MPC モデルを採用する。図 4 に流速ベクトルを、図 5 に中心線上の流速分布を示す。

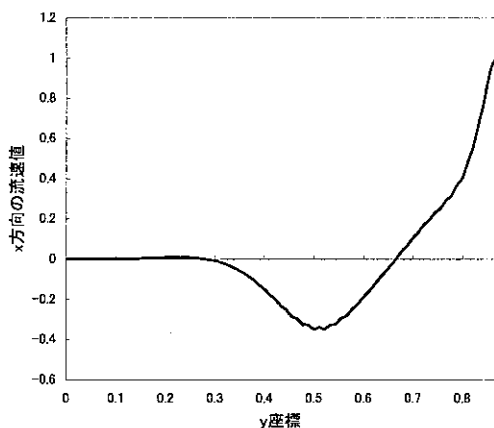


(a) Re=800

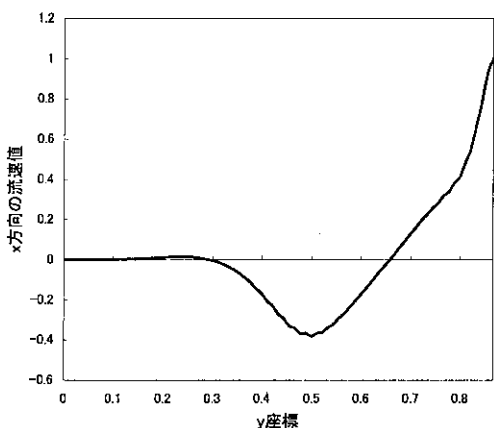


(b) Re=1000

図4 流速ベクトル図



(a) Re=800



(b) Re=1000

図5 中心線上流速分布図

#### 4 おわりに

本論では、格子ボルツマン法を用いて非圧縮性粘性流れ問題に対する定式化を行い、正方キャビティ流れ及び三角キャビティ流れの両問題に適用することで、本手法の有効性を検討した。

正方キャビティ流れ問題では、1次渦や2次渦の生成が確認でき、Ghiaらの差分解とほぼ一致する解が得られた。特に格子BGKモデルでは、MPCモデルより良好な解を得ることができ、さらに計算時間も大幅に短縮することができた。これは、MPCモデルで用いられる格子ボルツマン方程式が、各々の衝突パターンを陽的に表しているため、各速度方向に対して個別に粒子分布関数を計算しなければならないが、格子BGKモデルで用いられる格子ボルツマン方程

式は、衝突演算子を行列で表して、さらにその固有値を単一時間緩和係数 $\phi$ で代表させるため、各々の衝突パターンを個別に計算する必要がないためであると考えられる。すなわち、1回の衝突によって全格子点の粒子分布に対して、同時に $1/\phi$ の割合で局所的な平衡状態へ緩和させるので、大幅に計算時間を短縮することが可能であると考えられる。

また、三角キャビティ流れ問題では、レイノルズ数が増加するにしたがって1次渦の下に生成される2次渦が大きく発達していることがわかる。さらに、3次渦の生成も確認することができた。これに伴って1次渦は変形して徐々に右方向へ移動し、再びキャビティの中心付近に戻ってくる様子を捉えることができた。中心線上の流速分布からも、x方向の流速値が0になっているy座標の箇所が渦の存在している場所であると考えられるので、上記と同様なことが言える。

以上より、格子ボルツマン法の非圧縮性粘性流れ問題への適用性や有効性を示すことができた。今後は、格子点を不等間隔で配置できるような一般座標系を用いた分布関数を構築することによって、さらに高レイノルズ数の流れ解析へ適用することや、圧縮性を考慮した流れ解析への応用が期待される。

#### 参考文献

- [1] 登坂宣好: 計算力学における数値解析, 数理科学, 417(1998), pp. 35-41
- [2] 高野公敬, 登坂宣好: 格子ボルツマン法を用いた非圧縮性粘性流れ解析, 日本機械学会第15回計算力学講演会講演論文集(2002), pp. 539-540
- [3] 高野公敬, 登坂宣好: 格子ボルツマン法による2次元キャビティ流れの数値シミュレーション, 第35回日本大学生産工学部学術講演会数理情報部会講演概要(2002), pp. 7-10
- [4] 高野公敬, 登坂宣好: 格子ボルツマン法による3角キャビティ流れ解析, 計算工学講演会論文集, 7-1(2002), pp. 37-40
- [5] 春山隆宏, 高野公敬, 登坂宣好: 三角キャビティ流れの数値シミュレーション, 第35回日本大学生産工学部学術講演会数理情報部会講演概要(2002), pp. 11-14
- [6] U. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin: High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, 48(1982), pp. 387-411